Matematika emelt szintű érettségi témakörök
2017

Összeállította:
Kovácsné Németh Sarolta
(gimnáziumi tanár)

Mozaik Kiadó – Szeged, 2017

Tudnivalók a vizsgázók számára

A szóbeli vizsgán a tétel címében megjelölt téma kifejtését és a kitűzött feladat megoldását várják el a vizsgázóktól.
A tétel címében megjelölt témát logikusan, arányosan felépített, szabad előadásban, önállóan kell kifejtenie. A vizsgabizottság tagjai akkor kérdezhetnek közbe, ha teljesen helytelenül indult el, vagy nyilvánvaló, hogy elakadt.
Ehhez a felkészülési idő alatt célszerű vázlatot készítenie. Ebben tervezze meg a címben megjelölt témakör(ök)höz tartozó ismeretanyag rövid áttekintését, dolgozza ki azokat a részeket, amelyeket részletesen kifejt, oldja meg a feladatot. Vázlatát felelete közben használhatja.

A feleletben feltétlenül szerepelniük kell az alábbi részleteknek:

- egy, a témához tartozó, a vizsgázó választása szerinti definíció *pontos* kimondása;
- egy, a témához tartozó, a vizsgázó választása szerinti tétel *pontos* kimondása és bizonyítása;
- a kitűzött feladat megoldása;
- a téma matematikán belüli vagy azon kívüli alkalmazása, illetve matematikatörténeti vonatkozása (több *ismertetése* vagy egy *részletesebb bemutatása*)

Ha a tételhez tartozó kitűzött feladat bizonyítást igényel, akkor ennek a megoldása nem helyettesíti a témakörhöz tartozó tétel kimondását és bizonyítását.
Használható segédeszközök: a tételcímekkel együtt nyilvánosságra hozott képlettár (a vizsgabizottság biztosítja), szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológép, körző, vonalzóés szögmérő.

A tétellapra rajzolni és írni nem szabad!

Értékelés

A szóbeli vizsgán elérhető pontszám 35. Az értékelés központi értékelési útmutató alapján történik.

Az értékelési szempontok:

A felelet tartalmi összetétele, felépítésének szerkezete	**10 pont**
Logikus felépítés, szerkesztettség, tartalmi gazdagság	6 pont
Ebben a pontban kell értékelni a feleletben szereplő, a témához illő definícióknak, a kimondott tételnek és bizonyításának a nehézségét is.	
A felelet matematikai tartalmi helyessége	4 pont
A feleletben szereplő, a témához illő definíció helyes kimondása	**2 pont**
Ha több definíciót is elmond, akkor a definícióra adható 2 ponttal a legjobbat kell értékelni.	
A feleletben szereplő, a témához illő tétel helyes kimondása és bizonyítása	**6 pont**
A tétel helyes kimondása	2 pont
A tétel helyes bizonyítása	4 pont
A kitűzött feladat helyes megoldása	**8 pont**
Ha a felelő a feladatot csak a vizsgáztató segítségével tudja elkezdeni, akkor maximum 5 pont adható.	
Alkalmazások ismertetése	**4 pont**
Egy, a tételhez illő alkalmazás vagy matematikatörténeti vonatkozás részletes kifejtése, vagy 3-4 lényegesen eltérő alkalmazás vagy matematikatörténeti vonatkozás rövid ismertetése.	
Matematikai nyelvhasználat, kommunikációs készség	**5 pont**
Matematikai nyelvhasználat	2 pont
Önálló, folyamatos előadásmód	2 pont
Kommunikáció	1 pont
Ez utóbbi 1 pont akkor is jár, ha a vizsgázó önálló felelete után nem volt szükség kérdésre.	

Felhívjuk a figyelmet, hogy azoknál a témaköröknél, ahol a címben foglalt téma kifejtésének egyik legfontosabb része alkalmazások ismertetése, ott a matematikán kívüli alkalmazások felsorolását helyettesítheti egy matematikán belüli alkalmazás részletes ismertetése.

Matematika emelt szintű szóbeli vizsga témakörei (tételek) 2017.

1. Halmazok, halmazműveletek. Nevezetes ponthalmazok a síkban és a térben. ... 4
2. Racionális és irracionális számok. Műveletek a racionális és irracionális számok halmazán. Közönséges és tizedes törtek. Halmazok számossága. ... 12
3. Oszthatóság, oszthatósági szabályok és tételek. Prímszámok. Számrendszerek. ... 17
4. A matematikai logika elemei. Logikai műveletek. Állítás és megfordítása, szükséges és elégséges feltételek, bemutatásuk tételek megfogalmazásában és bizonyításában. ... 22
5. Hatványozás, hatványfogalom kiterjesztése, a hatványozás azonosságai. Az n-edik gyök fogalma. A négyzetgyök azonosságai. Hatványfüggvények és a négyzetgyökfüggvény. ... 27
6. A logaritmus fogalma és azonosságai. Az exponenciális és a logaritmusfüggvény. ... 34
7. Egyenletmegoldási módszerek, ekvivalencia, gyökvesztés, hamis gyök. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek. ... 38
8. A leíró statisztika jellemzői, diagramok. Nevezetes közepek. ... 43
9. Számsorozatok és tulajdonságaik (korlátosság, monotonitás, konvergencia). Műveletek konvergens sorozatokkal. A számtani sorozat, az első n tag összege. ... 49
10. Mértani sorozat, az első n tag összege, végtelen mértani sor. Kamatszámítás, gyűjtőjáradék, törlesztőrészlet. Exponenciális folyamatok a társadalomban és a természetben. ... 53
11. Függvények lokális és globális tulajdonságai. A differenciálszámítás és alkalmazásai. ... 58
12. Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek. A hegyesszögek szögfüggvényei. A szögfüggvények általánosítása. ... 64
13. Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai és körei. ... 72
14. Összefüggések az általános háromszögek oldalai között, szögei között, oldalai és szögei között. ... 77
15. Egybevágóság és hasonlóság. A hasonlóság alkalmazásai geometriai tételek bizonyításában. ... 81
16. A kör és részei. Kerületi szög, középponti szög, látószög. Húrnégyszögek, érintőnégyszögek. ... 87
17. Vektorok, vektorműveletek. Vektorfelbontási tétel. Vektorok koordinátái. Skaláris szorzat. ... 94
18. Szakaszok és egyenesek a koordinátasíkon. Párhuzamos és merőleges egyenesek. Elsőfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek grafikus megoldása. ... 99
19. A kör és a parabola a koordinátasíkon. Kör és egyenes, parabola és egyenes kölcsönös helyzete. Másodfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása. ... 106
20. Térelemek távolsága és szöge. Térbeli alakzatok. Felszín- és térfogatszámítás. ... 113
21. A terület fogalma. Területszámítás elemi úton és az integrálszámítás felhasználásával. ... 120
22. Kombinációk. Binomiális tétel, a Pascal háromszög. A valószínűség kiszámításának kombinatorikus modellje. A hipergeometrikus eloszlás ... 126
23. Permutációk, variációk. A binomiális eloszlás. A valószínűség kiszámításának geometriai modellje. ... 131
24. Bizonyítási módszerek és bemutatásuk tételek bizonyításában. ... 136

Matematikatörténeti források:
Sain Márton: Matematikatörténeti ABC
Sain Márton: Nincs királyi út

1. Halmazok, halmazműveletek. Nevezetes ponthalmazok a síkban és a térben.

Vázlat:

I. Halmazok, részhalmazok
n elemű halmaz részhalmazainak száma

II. Halmazműveletek (komplementer, unió, metszet, különbség, Descartes-szorzat), műveletek tulajdonságai

III. Nevezetes ponthalmazok: kör (gömb), párhuzamos egyenespár (hengerfelület), szakaszfelező merőleges egyenes (sík), középpárhuzamos, szögfelező, parabola

IV. Egyéb ponthalmazok: ellipszis, hiperbola, 3 ponttól, illetve 3 egyenestől egyenlő távolágra lévő pontok, látókörív

V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

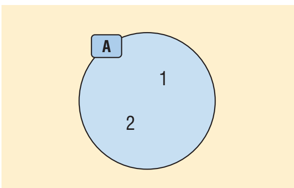
Kidolgozás:

I. Halmazok, részhalmazok

A halmaz és a halmaz eleme alapfogalom, ezeket a kifejezéseket nem definiáljuk. De a halmaz megadásának szigorú követelménye van: egy halmazt úgy kell megadnunk, hogy minden szóba jöhető dologról egyértelműen eldönthető legyen, hogy az adott halmazhoz tartozik vagy sem.
A halmazokat nyomtatott nagybetűvel, a halmaz elemeit kisbetűvel jelöljük a következő módon: $A = \{a; b; c\}$, ebben az esetben $a \in A$, $x \notin A$.

Halmaz megadási módjai:

- Elemeinek felsorolásával: $A = \{0; 2; 4; 6\}$
- Az elemeit egyértelműen meghatározó utasítással: $B = \{\text{egyjegyű páratlan számok}\}$
- Szimbólumokkal: $A = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 > 9\}$
- Venn-diagrammal:



DEFINÍCIÓ: Két halmaz egyenlő, ha ugyanazokat az elemeket tartalmazzák.

DEFINÍCIÓ: Az elem nélküli halmazt **üres halmaz**nak nevezzük.
Jele: { } vagy $\emptyset$.

DEFINÍCIÓ: Az A halmaz **részhalmaz**a a B halmaznak, ha A minden eleme a B halmaznak is eleme.
Jele: $A \subseteq B$.

DEFINÍCIÓ: Az A halmaz **valódi részhalmaz**a a B halmaznak, ha A részhalmaza a B-nek, de nem egyenlő vele.
Jele: $A \subset B$.

Tulajdonságok:
- Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza: $\varnothing \subseteq A$.
- Minden halmaz önmaga részhalmaza: $A \subseteq A$.
- Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.
- Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$.

TÉTEL: Az n elemű halmaz összes részhalmazainak száma: 2^n ($n \in \mathbb{N}$).

BIZONYÍTÁS I.: A bizonyítást teljes indukcióval végezzük, amelynek lényege, hogy először belátjuk egy konkrét n esetére az állítást, majd azt mutatjuk meg, ha az állítás igaz egy tetszőleges n-re, akkor igaz az őt követő $(n + 1)$-re is, azaz bizonyítjuk az állítás öröklődését.
Az üres halmaznak egyetlen részhalmaza van: önmaga ($2^0 = 1$).
Egy egyelemű halmaznak 2 részhalmaza van: az üres halmaz és önmaga ($2^1 = 2$).
Egy kételemű halmaznak 4 részhalmaza van: az üres halmaz, 2 egyelemű halmaz és önmaga ($2^2 = 4$).
Tegyük fel, hogy egy k elemű halmaznak 2^k db részhalmaza van. Bizonyítani kell, hogy ez öröklődik, vagyis egy $(k + 1)$ elemű halmaznak 2^{k+1} db részhalmaza van.
Tekintsük az előbbi k elemű halmazt. Ekkor ha az eddigi elemek mellé egy $(k + 1)$-edik elemet teszünk a halmazba, akkor ezzel megkétszerezzük a lehetséges részhalmazok számát, hiszen az új elemet vagy kiválasztjuk az eddigi részhalmazokba, vagy nem. Vagyis a $(k + 1)$ elemű halmaz részhalmazainak száma $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, amit bizonyítani kívántunk. □

BIZONYÍTÁS II.: Az n elemű halmaznak $\binom{n}{0}$ db 0 elemű, $\binom{n}{1}$ db 1 elemű, $\binom{n}{2}$ db 2 elemű, … $\binom{n}{n-1}$ db $n-1$ elemű, $\binom{n}{n}$ db n elemű részhalmaza van, mert n elemből k db-ot kiválasztani $\binom{n}{k}$-féleképpen lehet.

Így az összes részhalmazok száma: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$.

Vizsgáljuk meg 2^n-t:

$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}\cdot 1^0\cdot 1^n+\binom{n}{1}\cdot 1^1\cdot 1^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot 1^2\cdot 1^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot 1^{n-1}\cdot 1^1+\binom{n}{n}\cdot 1^n 1^0$, ami egyenlő $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$-nel a binomiális tétel miatt. □

II. Halmazműveletek

DEFINÍCIÓ: Azt a halmazt, amelynek a vizsgált halmazok részhalmazai, **alaphalmaz**nak vagy univerzumnak nevezzük. Jele: U vagy H.

DEFINÍCIÓ: Egy A halmaz **komplementer halmaz**ának az alaphalmaz azon elemeinek halmazát nevezzük, amelyek az A halmaznak nem elemei. Jele: $\overline{A}$. (Fontos tulajdonság: $\overline{\overline{A}} = A$.)

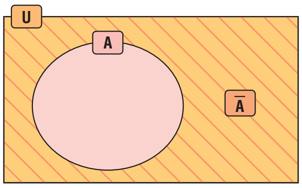
DEFINÍCIÓ: Két vagy több halmaz **unió**ja vagy egyesítése mindazon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei. Jele: $\cup$.

DEFINÍCIÓ: Két vagy több halmaz **metszet**e vagy közös része pontosan azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek mindegyik halmaznak elemei. Jele: $\cap$.

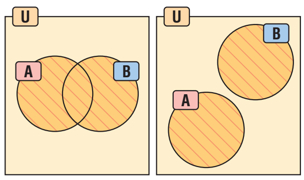
DEFINÍCIÓ: Két halmaz **diszjunkt**, ha nincs közös elemük, vagyis a metszetük üres halmaz. $A \cap B = \emptyset$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B halmaz **különbsége** az A halmaz mindazon elemeinek halmaza, amelyek a B halmaznak nem elemei. Jele: $A \setminus B$.

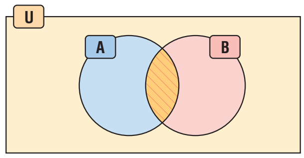
DEFINÍCIÓ: Az A és B halmaz **Descartes-féle szorzata** az a halmaz, amelynek elemei az összes olyan rendezett $(a; b)$ pár, amelynél $a \in A$ és $b \in B$. Jele: $A \times B$.



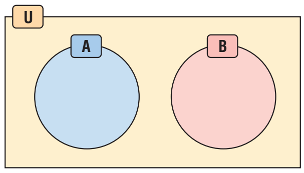
Komplementer halmaz



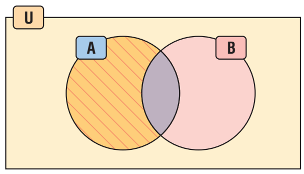
Két halmaz uniója



Két halmaz metszete



Diszjunkt halmazok



A és B halmaz $A \setminus B$ különbsége

Halmazműveletek tulajdonságai

Kommutatív (felcserélhető)	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asszociatív (csoportosítható)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Disztributív (széttagolható)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
De-Morgan azonosságok	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	
További azonosságok	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup A = A$ $A \cup \overline{A} = U$ $A \cup U = U$ $\overline{\overline{A}} = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap A = A$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $A \cap U = A$

III. Nevezetes ponthalmazok a síkban és a térben

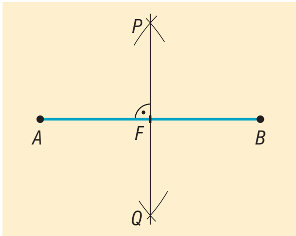
DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott O pontjától adott r távolságra vannak, egy O középpontú, r sugarú **kör.**

DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a térben, amelyek a tér adott O pontjától adott r távolságra vannak, egy O középpontú, r sugarú **gömb.**

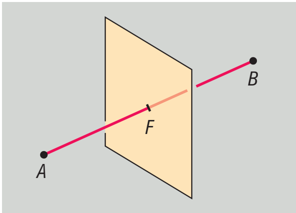
DEFINÍCIÓ: Adott egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza a síkon az egyenessel **párhuzamos egyenespár.**

DEFINÍCIÓ: Adott egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza a térben olyan **hengerfelület**, amelynek tengelye az adott egyenes.

DEFINÍCIÓ: Két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban a **szakasz felező-merőleges egyenese.**

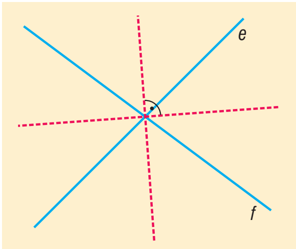


DEFINÍCIÓ: Két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben a **szakasz felezőmerőleges síkja.**



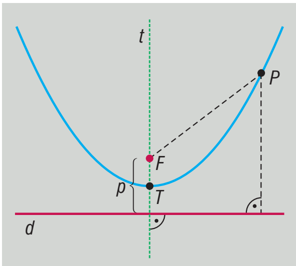
DEFINÍCIÓ: Két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban olyan egyenes, amely a két adott egyenessel párhuzamos és távolságukat felezi **(középpárhuzamos).**

DEFINÍCIÓ: Két metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az általuk bezárt szögek **szögfelező egyenesei**. Két ilyen egyenes van, ezek merőlegesek egymásra.



DEFINÍCIÓ: Egy egyenestől és egy rajta kívül lévő ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon: a **parabola.**

Az adott pont a parabola fókuszpontja, az adott egyenes a parabola vezéregyenese (direktrixe), a pont és az egyenes távolsága a parabola paramétere.



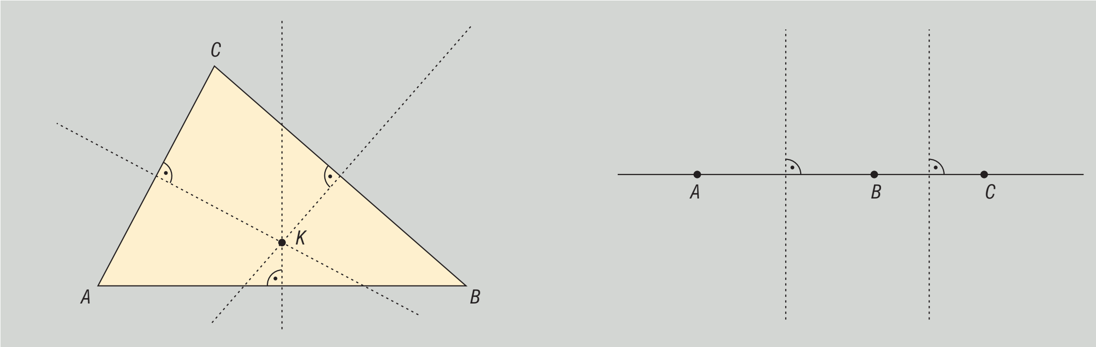
IV. Egyéb ponthalmazok

DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyeknek a sík két különböző adott pontjától mért távolságösszege az adott pontok távolságánál nagyobb állandó: **ellipszis.**

A két adott pont (F_1 és F_2) az ellipszis fókuszpontjai. Az adott távolság az ellipszis nagytengelye, az F_1F_2 szakasz felezőmerőlegesének az ellipszis tartományába eső szakasza az ellipszis kistengelye.

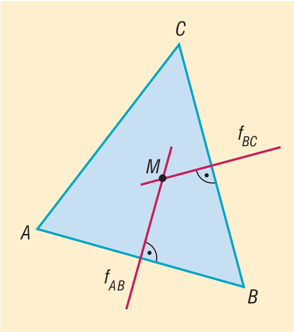
DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyeknek a sík két különböző adott pontjától mért távolságkülönbségének abszolút értéke a két adott pont távolságánál kisebb állandó: **hiperbola.**
A két adott pont (F_1 és F_2) a hiperbola fókuszpontjai, az adott távolság a hiperbola főtengelye.

TÉTEL: Három adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon egy pont (ha a 3 pont nem esik egy egyenesre), vagy üres halmaz (ha a 3 pont egy egyenesre esik).



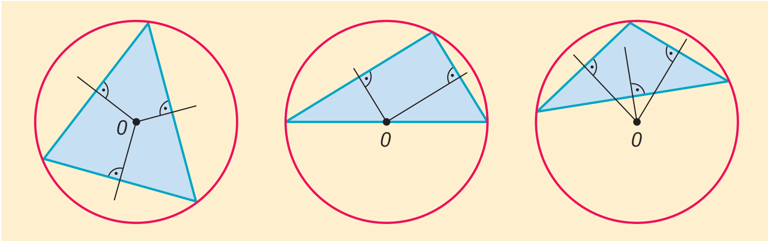
TÉTEL: A háromszög három oldalfelező merőlegese egy pontban metszi egymást.

BIZONYÍTÁS: Tekintsük az ABC háromszög AB és BC oldalának oldalfelező merőlegesét. Ezek az egyenesek metszik egymást, mert a háromszög oldalai nem lehetnek párhuzamosak egymással. Jelöljük a két oldalfelező merőleges metszéspontját M-mel. Ekkor M pont egyenlő távolságra van A és B csúcsoktól (mert M illeszkedik AB szakaszfelező merőlegesére), illetve B és C csúcsoktól (mert M illeszkedik BC szakaszfelező merőlegesére). Ebből következik, hogy M egyenlő távolságra van A és C csúcsoktól, tehát M-n áthalad AC oldalfelező merőlegese. Tehát a három oldalfelező merőleges egy pontban metszi egymást.□



TÉTEL: A háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja **a háromszög köré írt kör középpontja.**

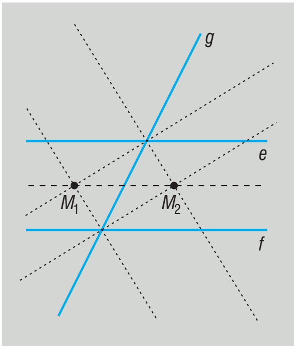
BIZONYÍTÁS: Az előbbi bizonyítás szerint M egyenlő távolságra van A-tól, B-től és C-től. Legyen ez a távolság $MA = MB = MC = r$. Ekkor A, B és C pontok r távolságra vannak M-től, azaz illeszkednek egy M középpontú, r sugarú körre.□
A háromszög köré írt kör középpontja hegyesszögű háromszög esetén a háromszögön belül, derékszögű háromszög esetén az átfogó felezőpontjába, tompaszögű háromszög esetén a háromszögön kívülre esik.



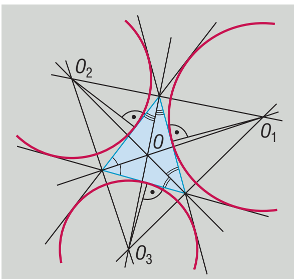
TÉTEL: Három adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben egy olyan egyenes, amely áthalad a három pont, mint háromszög köré írható kör középpontján, és merőleges a 3 pont síkjára (ha a 3 pont nem esik egy egyenesbe), vagy üres halmaz (ha a 3 pont egy egyenesbe esik).

TÉTEL: Három egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon:

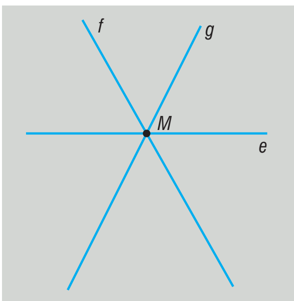
- Ha a 3 egyenes párhuzamos, akkor üres halmaz.
- Ha 2 egyenes párhuzamos ($e \parallel f$), egy pedig metszi őket (g), akkor a 2 párhuzamos egyenes középpárhuzamosán két olyan pont, amelyek illeszkednek két metsző egyenes (pl. e és g) szögfelezőire.



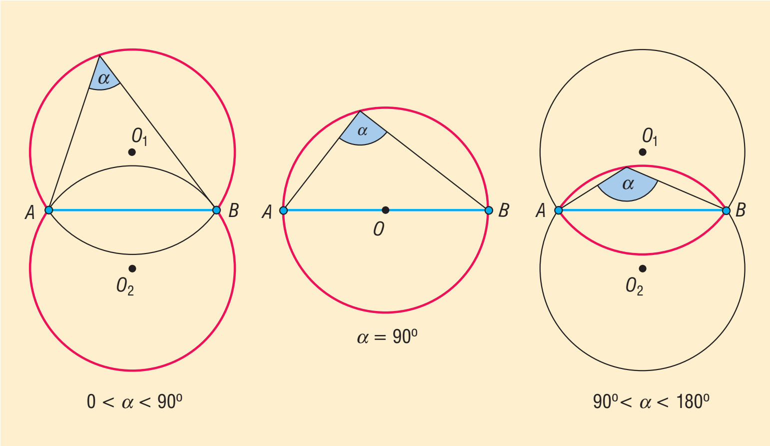
- Ha a 3 egyenes 3 különböző pontban metszi egymást, akkor szögfelező egyeneseik metszéspontjai. 4 ilyen pont van, az egyik **a háromszög beírt köré**nek, 3 pedig **a háromszög hozzáírt körei**nek középpontja.



- Ha a 3 egyenes egy pontban metszi egymást, akkor egyetlen pont, a 3 egyenes metszéspontja.

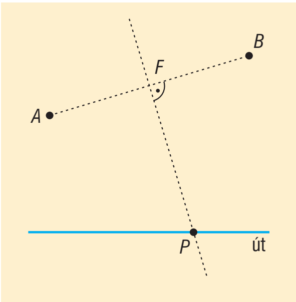


DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyekből egy adott szakasz adott α szögben ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) látszik két, a szakasz egyenesére szimmetrikusan elhelyezkedő körív **(látókörívek).**



V. Alkalmazások

- Biológiában a rendszertan, kémiában a periódusos rendszerbeli csoportosítás is halmazelméleti fogalmak. Műveletek: melyik csoport melyiknek részhalmaza?
- Vércsoport szerint az emberek különböző halmazokba sorolhatók. Műveletek: ki kinek adhat vért?
- Európa országai hivatalos nyelvük alapján halmazokba sorolhatók. Műveletek: melyik országban hivatalos nyelv az angol vagy a német?
- Az érettségin a nem kötelező tárgyak választása szerint is halmazokba sorolhatók a vizsgázók. Műveletek: ki vizsgázik kémiából és biológiából is?
- A függvényekkel kapcsolatban is használjuk a halmazokat (értelmezési tartomány, értékkészlet).
- Egyenletek értelmezési tartományának vizsgálatakor számhalmazok metszetét képezzük.
- Koordináta-geometriában a kör, a parabola, az ellipszis és a hiperbola egyenletének felírásakor az adott görbe definícióját használjuk fel.
- Látókörívek: egy téglalap egyik oldala a szomszédos oldal mely pontjából látszik a legnagyobb szögben (színház, sportpálya).
- Szerkesztési feladatokban: háromszög szerkesztése egy oldal, a vele szemközti szög és az oldalhoz tartozó magasság ismeretében, vagy adott. egy pont és egy egyenes, szerkesszük meg az egyenest érintő, a ponton áthaladó, adott sugarú köröket.
- Parabolaantennák.
- Két tanya közös postaládát kap az országút mentén. Hova helyezzék, hogy mindkét tanyától egyenlő távolságra legyen?



Matematikatörténeti vonatkozások:

- A halmazok szemléltetésére először **Euler** (1707–1783) német matematikus használt köröket. Az ő jelölésrendszerét finomította később **Venn** (1834–1923) angol matematikus, ez a jelölés terjedt el, amit Venn-diagramnak nevezünk.
- A halmazelmélet megteremtése **Cantor** (1845–1918) német matematikushoz fűződik. Kortársai többsége nem értette meg a végtelen halmazok számosságával kapcsolatos gondolatait: a természetes számok halmaza valódi részhalmaza a racionális számok halmazának, számosságuk mégis egyenlő. Meghatározása szerint két halmaz egyenlő számosságú, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető. Hozzá fűződik a megszámlálható halmazok fogalma. A róla elnevezett Cantor-féle átlós eljárással bizonyította, hogy a valós számok nem megszámlálhatóak.

2. Racionális és irracionális számok. Műveletek a racionális és irracionális számok halmazán. Közönséges és tizedes törtek. Halmazok számossága.

Vázlat:

I. Számhalmazok: természetes, egész, racionális, irracionális, valós számok, ezek zártsága
II. Műveletek a racionális számok halmazán
III. Műveletek az irracionális számok halmazán
IV. Műveleti tulajdonságok: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás
V. Közönséges és tizedes törtek
VI. Halmazok számossága: véges, végtelen (megszámlálhatóan illetve nem megszámlálhatóan végtelen) halmazok
VIII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Számhalmazok

DEFINÍCIÓ: A **természetes számok** halmaza ($\mathbb{N}$) a pozitív egész számokból és a 0-ból áll.
A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és a szorzásra nézve, azaz bármely két természetes szám összege és szorzata természetes szám. Ugyanakkor a kivonás és az osztás már nem végezhető el ezen a halmazon belül, ezek a műveletek „kimutatnak” a halmazból. Pl. $3 - x = 5$ egyenlet megoldása.

DEFINÍCIÓ: Az **egész számok** halmaza ($\mathbb{Z}$) a természetes számokból és azok ellentettjeiből áll.
Az egész számok halmaza az összeadáson és a szorzáson kívül a kivonásra nézve is zárt, ugyanakkor az osztás kimutathat a halmazból. Pl. $2x + 3 = 4$ egyenlet megoldása.

DEFINÍCIÓ: A **racionális számok** halmaza ($\mathbb{Q}$) azokból a számokból áll, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, azaz $\frac{a}{b}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.
A racionális számok halmaza mind a 4 alapműveletre zárt (osztásra, ha az osztó nem 0), de itt is találunk olyan egyenletet, amelynek nincs megoldása ezen a halmazon. Pl.: $2x^2 - 3 = 0$.

DEFINÍCIÓ: Azokat a számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, **irracionális számok**nak ($\mathbb{Q}^*$) nevezzük.

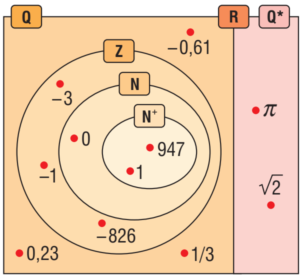
TÉTEL: $\sqrt{2}$ irracionális szám.

BIZONYÍTÁS: A bizonyítást indirekt módon végezzük, lényege, hogy a bizonyítandó állítás tagadásáról bebizonyítjuk, hogy az hamis. Ez azt jelenti, hogy a bizonyítandó állítás igaz.
Tegyük fel hogy $\sqrt{2}$ racionális szám, azaz felírható $\frac{a}{b}$ alakban, ahol a, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $(a; b) = 1$.
Ekkor $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2 \cdot b^2 = a^2$.

Az egyenlet jobb oldalán szereplő (a^2) szám prímtényezős felbontásában a 2 mindenféleképpen páros kitevőn (akár a nulladikon) szerepel, míg a bal oldalon levő szám ($2 \cdot b^2$) prímtényezős felbontásában a 2 kitevője páratlan (legkevesebb 1).
Ez azonban lehetetlen, hiszen a számelmélet alaptétele szerint egy pozitív egész számnak nincs két lényegesen különböző felbontása.
Tehát nem igaz az indirekt feltevésünk, vagyis igaz az eredeti állítás: $\sqrt{2}$ irracionális. □

– Az irracionális számok halmaza nem zárt a 4 alapműveletre $\left(\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)\right)=0 \notin \mathbb{Q}^*$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\notin \mathbb{Q}^*$, $\sqrt{2}:\sqrt{2}=1\notin \mathbb{Q}^*$.
– Az irracionális számok tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos tizedes tört.

DEFINÍCIÓ: A racionális és az irracionális számok halmaza diszjunkt halmazok ($\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^* = \emptyset$), a két halmaz egyesítése a valós számok halmaza: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$.
A valós számok halmaza zárt a 4 alapműveletre.
A valós számok és részhalmazai:



II. Műveletek a racionális számok halmazán

Egy közönséges tört értéke nem, csak az alakja változik, ha a számlálóját és a nevezőjét ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk (bővítés), vagy ugyanazzal a 0-tól különböző számmal osztjuk (egyszerűsítés).
Ha a racionális számok közönséges tört alakúak, akkor a következő szabályokkal lehet elvégezni az alapműveleteket:

- **Összeadás és kivonás:**
  Csak azonos nevezőjű törteket lehet összeadni, kivonni, ezért a törteket bővítjük egy közös többszörösű nevezőre (legjobb, ha a legkisebb közös többszörösű nevezőre, mert így tudunk a legkisebb számokkal számolni):
  $$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}\pm\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{a\cdot d\pm c\cdot b}{b\cdot d},\ \text{ahol}\ b,d\neq 0.$$
  Ha a nevezők (b és d) relatív prímek, akkor a legkisebb közös többszörösük a szorzatuk.

- **Szorzás:**
  Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel szorozzuk:
  $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\ \text{ahol}\ b,d\neq 0.$$
  Egész számmal úgy szorzunk törtet, hogy törtként írjuk fel a szorzót $\left(c=\frac{c}{1}\right)$, vagyis igazából a számlálót megszorozzuk, a nevezőt változatlanul hagyjuk.

- **Osztás:**
  Törtet törttel úgy osztunk, hogy a változatlan osztandót szorozzuk az osztó reciprokával:
  $$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c},\ \text{ahol}\ b,c,d\neq 0.$$

Egész számmal úgy osztunk, hogy törtként írjuk fel az osztót $\left(c = \frac{c}{1}\right)$, vagyis igazából a nevezőt megszorozzuk, a számlálót változatlanul hagyjuk, vagy (egyszerűsíthető esetben) a számlálót osztjuk, a nevezőt változatlanul hagyjuk.

III. Műveletek az irracionális számok halmazán

Az alapműveletek definiálhatók az irracionális számok körében úgy, hogy az eddigi azonosságok életben maradjanak. Mivel tizedestört alakjuk végtelen, nem periodikus, így azt csak közelítően tudjuk megadni. Ezért a pontos értékeket pl. hatvány, gyök, logaritmus alakban adjuk meg, ilyenkor viszont a megfelelő műveleti szabályokkal dolgozunk.

IV. Műveleti tulajdonságok: *a, b, c* $\in \mathbb{R}$ esetén

1. az összeadás és a szorzás kommutatív (felcserélhető)

$$a + b = b + a \quad \text{és} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

2. az összeadás és a szorzás asszociatív (csoportosítható)

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{és} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. a szorzás az összeadásra nézve disztributív (széttagolható)

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

V. Közönséges és tizedes törtek

A közönséges törtek formái lehetnek:

Az $\frac{a}{b}$ közönséges tört, vagyis az $\frac{a}{b}$ hányados a következő alakokban fordulhat elő ($a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, és a tört végsőkig leegyszerűsített, azaz a és b legnagyobb közös osztója 1):
- egész szám, ha b osztója a-nak,
- véges tizedestört, ha b prímtényezős felbontásában a 2 és az 5 számokon kívül nincs más prímszám,
- végtelen szakaszos tizedestört, ha b prímtényezős felbontásában a 2 és az 5 számokon kívül más prímszám is van.

Tehát a racionális számok a következő alakúak: közönséges törtek, egészek, véges vagy végtelen szakaszos tizedestörtek.

A tizedestörtek formái lehetnek:

- véges tizedestörtek, ezek felírhatók közönséges tört alakban. Pl. $2{,}3 = \frac{23}{10}$.
- végtelen tizedestörtek:
  - szakaszos tizedestörtek, ezek felírhatók közönséges tört alakban. Pl. végtelen mértani sor összegeként, vagy a következő módszerrel:

$$2{,}354545... = x$$
$$235{,}454545... = 100x.$$

  A két egyenletet kivonva egymásból

$$233{,}1 = 99x \Rightarrow x = \frac{233{,}1}{99} = \frac{2331}{990}$$

  - nem szakaszos tizedestörtek **nem** írhatóak át közönséges tört alakba.

Összefoglalva:

A közönséges törtek mind felírhatók tizedestört alakban (egész, véges, végtelen szakaszos tört alakban). A nem szakaszos tizedestörtek mind irracionális számok, tehát nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, tehát nem közönséges törtek. Ebből következik, hogy nem minden tizedestört közönséges tört.

VI. Halmazok számossága

DEFINÍCIÓ: Egy A **halmaz számossága** az A halmaz elemeinek számát jelenti. Jele: $|A|$. Egy halmaz számossága lehet véges vagy végtelen.

DEFINÍCIÓ: Egy halmaz **véges halmaz**, ha elemeinek számát egy természetes számmal megadhatjuk. Ellenkező esetben, azaz ha a halmaz elemeinek számát nem adhatjuk meg természetes számmal, akkor **végtelen halmaz**ról beszélünk.

DEFINÍCIÓ: A végtelen halmazok között találhatunk olyat, melynek elemei sorba rendezhetők, tehát megadható az 1., 2., 3., 4., … eleme. A pozitív természetes számokkal megegyező számosságú halmazokat **megszámlálhatóan végtelen halmaz**oknak nevezzük.
A megszámlálhatóság és a sorba rendezhetőség egy végtelen halmaznál ugyanazt jelenti.
Minden olyan halmaz megszámlálhatóan végtelen számosságú, amelynek elemei és a természetes számok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.
Megszámlálhatóan végtelen számosságúak: egész számok, páros számok, négyzetszámok, racionális számok.

DEFINÍCIÓ: A valós számok számosságával megegyező számosságú halmazokat **nem megszámlálhatóan végtelen** vagy kontinuum számosságú halmazoknak nevezzük. Pl.: irracionális számok halmaza, számegyenes pontjainak halmaza, intervallum pontjainak halmaza.

TÉTEL: Számosság és halmazműveletek kapcsolata (logikai szita): A, B és C véges halmazok számosságára érvényesek a következők:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|\overline{A \cup B}| = |U| - |A \cup B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

VII. Alkalmazások:

- Racionális számok: arányok, arányosság, hasonlóság
- Irracionális számok: szabályos háromszög magassága $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, négyzet átlója $(a\sqrt{2})$, kör kerülete ($2r\pi$), területe ($r^2\pi$).
- Kifejezések legbővebb értelmezési tartományának meghatározása, pl. $\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$.
- Függvény értékkészletének megállapítása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Az első **számírások** nem a mai írásjelekkel, hanem szimbólumokkal, jelekkel (pl. ékírás, római számok) történtek. A mai számírást a XI. században az arab **al-Hvárizmi** matematikus írta le először. Európába **Fibonacci** olasz matematikus a 12. században hozta be, de csak a XV-XVI. században terjedt el. Fibonacci nem csak a 10 számjegyet, hanem a helyiértékes számírást is elhozta Európába. *„Van tíz hindu jel: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Ezen jelek segítségével bármilyen számot fel lehet írni, amit csak akarunk.”*

- A zérust jelentő szó először 100 körül jelent meg a hinduknál.
- Az irracionális számokat már **Pitagorasz** (Kr.e. 450 körül) is ismerte, ekkor a hinduk már ismerték a négyzet oldalának és átlójának viszonyát.
- A negatív számok viszonylag későn jelentek meg: az egyenletek megoldásakor kaptak olyan számokat, amiket először nem tudtak értelmezni. **Cardano** (1501–1576) olasz matematikus fiktív számoknak nevezte őket, **Viète** (1540–1603) francia matematikus elvetette létezésüket.
- **Descartes** francia matematikus 1637-ben már minden előítélet nélkül használta az általa hamis számoknak nevezett negatív számokat.
- **Gauss** (1777–1855) német matematikus részletesen tárgyalta a komplex számok algebráját és aritmetikáját, ahol $\sqrt{-1} = i$.
- A halmazelmélet megteremtése **Cantor** (1845–1918) német matematikushoz fűződik. Kortársai többsége nem értette meg a végtelen halmazok számosságával kapcsolatos gondolatait: a természetes számok halmaza valódi részhalmaza a racionális számok halmazának, számosságuk mégis egyenlő. Meghatározása szerint két halmaz egyenlő számosságú, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető. Hozzá fűződik a megszámlálható halmazok fogalma. A róla elnevezett Cantor-féle. átlós eljárással bizonyította, hogy a valós számok nem megszámlálhatóak.

3. Oszthatóság, oszthatósági szabályok és tételek. Prímszámok. Számrendszerek.

Vázlat:

I. Számelméleti alapfogalmak: osztó, többszörös, oszthatóság fogalma, tulajdonságai, oszthatósági szabályok.
II. Prímszám, összetett szám, számelmélet alaptétele, osztók száma.
III. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.
IV. Számrendszerek
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Oszthatóság

Az oszthatóság fogalmánál alaphalmaznak az egész számok halmazát tekintjük. Két egész szám hányadosa nem mindig egész szám, az oszthatóságnál azt vizsgáljuk, hogy egész számok osztásakor mikor lesz a hányados is egész szám, vagyis a maradék 0.

DEFINÍCIÓ: Egy a egész szám **osztó**ja egy b egész számnak, ha található olyan c egész szám, amelyre $a \cdot c = b$. Jelölés: $a \mid b$. (Természetesen $c \mid b$ is igaz). Ebben az esetben az is igaz, hogy b **osztható** a-val és c-vel. Ekkor azt is mondhatjuk, hogy b **többszörös**e a-nak.

A 0 szerepe a számelméletben:

- a 0 minden nemnulla egész számnak többszöröse (0-szorosa), azaz 0 minden nemnulla egész számmal osztható ugyanis $0 = 0 \cdot a$: $a \mid 0$, ha $a \neq 0$. Ez azt is jelenti, hogy a 0 páros szám. A 0-nak egyetlen többszöröse van a 0, viszont a 0 bármely egész számnak a többszöröse.
- a 0 nem osztója egyetlen nemnulla egész számnak sem, ugyanis ha 0 osztója lenne egy b nem nulla egész számnak, akkor létezne egy olyan c egész szám, amikre $b = c \cdot 0 = 0$ lenne, ami ellentmond azzal a feltétellel, hogy $b \neq 0$.

Oszthatósági tételek:

Ha $a, b, c \in \mathbb{Z}$, akkor

TÉTEL: $1 \mid a$, azaz az 1 minden egész számnak osztója.

BIZONYÍTÁS: $a = a \cdot 1$.

TÉTEL: $a \mid a$, azaz minden egész szám osztója önmagának.

BIZONYÍTÁS: $a = 1 \cdot a$.

TÉTEL: $a \mid b$ és $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.

BIZONYÍTÁS: Az $a \mid b$ feltétel azt jelenti, hogy hogy van olyan d egész szám, amire $b = a \cdot d$, a $b \mid c$ feltétel azt jelenti, hogy van olyan e egész szám, amire $c = b \cdot e$.
Ekkor $c = b \cdot e = (a \cdot d) \cdot e = a \cdot (d \cdot e)$ a szorzás asszociativitása miatt, ahol a $d \cdot e$ szorzat egész szám.
Ez azt jelenti, hogy van olyan egész szám, aminek a-szorosa a c szám, vagyis $a \mid c$. □

TÉTEL: $a \mid b \Rightarrow a \mid b \cdot c$, azaz ha egy egész szám osztója egy másik egész számnak, akkor a többszöröseinek is osztója.

BIZONYÍTÁS: Az $a \mid b$ feltétel azt jelenti, hogy hogy van olyan d egész szám, hogy $b = a \cdot d$. Ekkor $b \cdot c = (a \cdot d) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ a szorzás asszociativitása miatt. A $(b \cdot c)$ szorzat egész, tehát találtunk megfelelő egész számot, így $a \mid b \cdot c$. □

TÉTEL: $a \mid b$ és $a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$, azaz ha egész egy szám osztója két egész számnak, akkor összegüknek és különbségüknek is osztója.

BIZONYÍTÁS: Az $a \mid b$ feltétel azt jelenti, hogy hogy van olyan d egész szám, hogy $b = a \cdot d$. Az $a \mid c$ feltétel azt jelenti, hogy hogy van olyan e egész szám, hogy $c = a \cdot e$. Ekkor $b \pm c = (a \cdot d) \pm (a \cdot e) = a \cdot (d \pm e)$ a disztributivitás miatt. A $(d \pm e)$ egész szám, tehát találtunk megfelelő egész számot, így $a \mid b$ és $a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$. □

TÉTEL: $a \mid b$ és $a \mid b + c \Rightarrow a \mid c$, azaz ha egy egész szám osztója egy összegnek és az összeg egyik tagjának, akkor osztója a másik tagnak is.

BIZONYÍTÁS: Az $a \mid b$ feltétel azt jelenti, hogy hogy van olyan d egész szám, hogy $b = a \cdot d$. Az $a \mid c$ feltétel azt jelenti, hogy hogy van olyan e egész szám, hogy $c = a \cdot e$. Ekkor $b \pm c = (a \cdot d) \pm (a \cdot e) = a \cdot (d \pm e)$ a disztributivitás miatt. A $(d \pm e)$ egész szám, tehát találtunk megfelelő egész számot, így $a \mid b$ és $a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$. □

Az oszthatóságot eddig az egész számokra értelmeztük, a továbbiakban leszűkítjük a természetes számokra, azaz a nemnegatív egész számokra. Egy adott problémánál tudjuk majd automatikusan alkalmazni az itt megfogalmazottakat az egész számokra.

TÉTEL: Ha a, $b \in \mathbb{Z}^+$, és $a \mid b$ valamint $b \mid a \Rightarrow a = b$, azaz ha két pozitív egész szám egymásnak osztója, akkor a két szám egyenlő.

BIZONYÍTÁS: Az $a \mid b$ feltétel azt jelenti, hogy van olyan d egész szám, amire $b = a \cdot d$, a $b \mid a$ feltétel azt jelenti, hogy hogy van olyan e egész szám, amire $a = b \cdot e$.
Ekkor $b = a \cdot d = (b \cdot e) \cdot d = b \cdot (d \cdot e)$ a szorzás asszociativitása miatt.
Osztva b-vel az egyenlet mindkét oldalát: $1 = b \cdot e$, aminek a pozitív egész számok halmazán csak a $d = e = 1$ a megoldása.
Ekkor viszont $a = b \cdot 1 = b$. □

Oszthatósági szabályok:

Egy n egész szám osztható

- 2-vel, ha n páros, vagyis utolsó jegye $\in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.
- 3-mal, ha a számjegyek összege osztható 3-mal.
- 4-gyel, ha a két utolsó jegyből képzett szám osztható 4-gyel.
- 5-tel, ha utolsó jegye $\in \{0; 5\}$.
- 6-tal, ha 2-vel és 3-mal osztható.
- 8-cal, ha a három utolsó jegyből képzett szám osztható 8-cal.
- 9-cel, ha számjegyek összege osztható 9-cel.
- 10-zel, ha utolsó jegye 0.

II. Prímszám, összetett szám, számelmélet alaptétele, osztók száma

DEFINÍCIÓ: Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek pontosan két pozitív osztója van, **prímszám**oknak nevezzük. Pl.: 2; 3; 5; 7; … Az 1 nem prímszám.

TÉTEL: Végtelen sok prímszám van.

BIZONYÍTÁS: Indirekt módon: Tegyük fel, hogy véges sok, azaz n db prímszám van. Legyenek ezek $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$. Képezzük a következő számot: $A = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n + 1$.
Az A számnak a felsorolt n db prím egyike sem osztója. Ebből két lehetőség következhet: vagy az A szám is prím (az n + 1-edik), vagy létezik olyan prím, amit nem soroltunk fel (akkor ez a prím az n + 1-edik). Tehát mindkét esetben találtunk a felsorolásban nem szereplő prímszámot, ezzel ellentmondásra jutottunk, azaz nem véges sok, hanem végtelen sok prímszám van. □

DEFINÍCIÓ: Azokat az 1-nél nagyobb számokat, amelyek nem prímszámok, **összetett szám**oknak nevezzük. Az összetett számoknak 2-nél több pozitív osztója van. Pl.: 4; 6; 8; 9; 10; …

TÉTEL: A számelmélet alaptétele: bármely összetett szám felírható prímszámok szorzataként, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.
Kanonikus alak: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, ahol $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$ különböző prímek, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_k$ nemnegatív egész számok.
Ekkor az n szám prímosztói: $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$.

TÉTEL: Meghatározható az ***n* szám osztóinak száma** a következő módon: A fenti n számnak $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1)$ darab pozitív osztója van.

DEFINÍCIÓ: Két vagy több pozitív egész szám **legnagyobb közös osztó**ja a közös osztók közül a legnagyobb. Jele: $(a; b)$.
Előállítása: felírjuk a számok prímtényezős alakját, vesszük a közös prímtényezőket (amelyek az összes felbontásban szerepelnek), ezeket a hozzájuk tartozó legkisebb kitevővel vesszük és összeszorozzuk.

DEFINÍCIÓ: Ha két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 1, akkor a két szám **relatív prím**.

DEFINÍCIÓ: Két vagy több pozitív egész szám **legkisebb közös többszörös**e a közös többszörösök közül a legkisebb. Jele: $[a; b]$.
Előállítása: felírjuk a számok prímtényezős alakját, vesszük az összes prímtényezőt, ezeket a hozzájuk tartozó legnagyobb kitevővel vesszük és összeszorozzuk.
Összefüggés két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse között: $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$.

III. Számrendszerek

DEFINÍCIÓ: Az ***a* alapú számrendszer** helyi értékei: $1, a^1, a^2, a^3, a^4, ...$, az a alapú számrendszerben a-féle számjegy van: $0, 1, 2, ..., a - 1$ (alaki érték), ha $a > 10$, akkor betűket használunk számjegyként.
A helyi értékes ábrázolás azt jelenti, hogy a számjegyek értékén kívül a leírásuk helye is értékkel bír. Egymás után írjuk a számjegyeket és az adott ponthoz viszonyítjuk a helyüket.

Általában 10-es számrendszerben dolgozunk. Ez azt jelenti, hogy a helyi értékek 10 természetes kitevőjű hatványai (10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ..., azaz egyesek, tízesek, százasok, ezresek, ...). A számok leírására 10-féle számjegyre van szükség: 0, 1, 2, ..., 9.
A 10-es számrendszeren kívül az informatikában gyakran használják a 2-es, vagyis bináris számrendszert (Neumann-elv), napjainkban pedig inkább a 16-os, azaz hexadecimális számrendszert. Ez utóbbinál merült fel az a probléma, hogyan írjunk le 16-féle számjegyet. Erre az a megoldás született, hogy a 10-nél nagyobb alapú számrendszerekben a 10, vagy annál nagyobb értékű számjegyeket betűkkel jelöljük. Így 16-os számrendszerben 10 helyett A, 11 helyett B, …, 15 helyett F a számjegy.

Áttérés 10-es számrendszerből más alapúba

A számot osztjuk az új számrendszer alapszámával, majd az így kapott hányadost újra mindaddig, míg 0 hányadost nem kapunk. Az osztásoknál kapott maradékok lesznek az új szám alaki értékei az egyesektől kezdve.
Pl. 948_{10} a 7-es számrendszerbe átírva:

$$\begin{aligned}948 &= 135 \cdot 7 + 3\\ 135 &= 19 \cdot 7 + 2\\ 19 &= 2 \cdot 7 + 5\\ 2 &= 0 \cdot 7 + 2\end{aligned}$$

Így $948_{10} = 2523_7$.

Áttérés más alapúból 10-es számrendszerbe

A megfelelő helyi értékeknek és a hozzájuk tartozó alaki értékeknek a szorzatösszege adja a 10-es számrendszerbeli értéket:
Pl.: 2523_7 a 10-es számrendszerbe átírva:

$$2523_7 = 2 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 1 = 948_{10}$$

A műveletek elvégezhetők az adott számrendszerben, vagy tízes számrendszerben és az eredmény adott számrendszerbe való visszaírásával.

IV. Alkalmazások:

- Legnagyobb közös osztó: törtek egyszerűsítése
- Legkisebb közös többszörös: törtek közös nevezőre hozása
- Kétismeretlenes egyenlet megoldása a természetes számok halmazán (oszthatóság felhasználásával) pl.:

$$\begin{aligned}3x + 2y &= xy\\ 3x &= xy - 2y\\ 3x &= y(x-2)\\ y &= \frac{3x}{x-2} = \frac{3x-6}{x-2} + \frac{6}{x-2} = 3 + \frac{6}{x-2} \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; x-2 \mid 6\end{aligned}$$

Ez a következő esetekben lehetséges:

$x-2$	1	2	3	6	–1	–2	–3	–6
x	**3**	**4**	**5**	**8**	1	**0**	–1	–4
y	**9**	**6**	**5**	**4**	–3	**0**	1	2

A táblázatban szerepel az összes megoldás, az 5 megjelölt számpár felel meg a feltételnek.

- Számítógépekben a 2-es számrendszer a két jegyével jól használható: folyik áram = 1, nem folyik áram = 0 (Neumann-elv). Ma már inkább a 16-os, hexadecimális számrendszert használják, ami felépíthető a kettesből.

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Az egyiptomi **Rhind-papiruszon** (Kr.e. 2000–1700) a „törzstörtek” felsorolásában csak a páratlan nevezőjű törtek szerepeltek, tehát az egyiptomiak különbséget tettek a páros és a páratlan számok között.
- Az öttel való oszthatóságot az **ókori hinduk** is ismerték.
- A hárommal való oszthatóság szabályát először a pizai **Leonardo** (1200 körül) írta le.

- A tizeneggyel való oszthatóság szabályát a XI. századi **arab** matematikusok ismerték, viszont szabatosan csak **Lagrange** (1736–1813) francia matematikus fogalmazta meg: a páros helyiértéken álló számjegyeinek összege megegyezik a páratlan helyiértéken álló számjegyek összegével, vagy a kettő különbsége 11-nek a többszöröse.
- **Pascal** (1623–1662) francia matematikus teljes általánosságban vizsgálta az oszthatóságot a természetes számok körében.
- Prímszámok meghatározás az **eratoszthenészi** (K.r.e. III. század) szitával: Felírjuk 2-től kezdődően az egész számokat (ő 100-ig csinálta). A 2-t bekeretezzük, ez az első prímszám, majd kihúzzuk az összes olyan számot, ami 2 többszöröse (minden másodikat). Bekeretezzük az első át nem húzott számot, a 3-at, ez a következő prímszám. Innen kezdve áthúzzuk a 3 többszöröseit (minden harmadikat). Ezt az eljárást folytatva megkapjuk a prímszámokat (bekeretezett számok).
- A **sumérok** (Kr.e. 2000 előtt) a 10-es, 12-és és 60-as alapú számrendszer kombinációját használták az asztronómiai és egyéb számításaiknál. Ezt a rendszer átvették a **görögök**, a **rómaiak** és az **egyiptomiak**. A 60-as számrendszer maradványait felismerhetjük a mai idő- (órák, percek) és a szögmérésben (szögpercek).
- A **12-es számrendszer** nagyon népszerű volt, mert a 12 maradék nélkül osztható 2-vel (felezhető), 3-mal (harmadolható), 4-gyel (negyedelhető), 6-tal (hatodolható). A ma használt naptárban az év 12 hónapra oszlik, 12 óra a nappal és 12 óra az éjszaka az év mind a 365 napján. Csaknem minden nyelvben külön szó van a 12 dologból álló csoportra, például a magyar „tucat”, az angol „dozen”, a német „das Dutzend”, az orosz „djuzsina” stb.
- Nyelvészeti kutatások szerint az ősmagyarok a hetes számrendszert ismerték, használták: mesék hétfejű sárkánya, hetedhét ország, hétmérföldes csizma, hétpecsétes titok, hétszerte szebb lett, stb.
- A 2-es alapú bináris számrendszert már a 17. században **Leibniz** ismertette, aki Kínában hallott róla, de általános használata a 20. században, a számítógépek megjelenésével terjedt el.
- **Neumann János** (1903–1957) magyar származású matematikus a róla elnevezett elvben megfogalmazta a számítógépek működési elvét. Ebben a számítógépek használjanak kettes számrendszert, az összes művelet kettes számrendszerbeli logikai műveletre redukálható.

4. A matematikai logika elemei. Logikai műveletek. Állítás és megfordítása, szükséges és elégséges feltételek, bemutatásuk tételek megfogalmazásában és bizonyításában.

Vázlat:

I. A matematikai logika fogalma
II. Logikai műveletek (tagadás, diszjunkció, konjunkció, implikáció, ekvivalencia), műveletek tulajdonságai
III. Állítás és megfordítása
Szükséges és elégséges feltétel, bemutatásuk
IV. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. A matematikai logika fogalma

A matematikai logika a gondolkodás matematikai formában kifejezhető, matematikai eszközökkel vizsgálható összefüggéseinek, törvényeinek feltárásával foglalkozik. Fő feladata a következtetések helyességének vizsgálata.

II. Logikai műveletek

DEFINÍCIÓ: Az **állítás** (vagy kijelentés) olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen el lehet dönteni, hogy igaz vagy hamis.

DEFINÍCIÓ: Az igaz és a hamis a kijelentés **logikai érték**e.
Ha az A állítás igaz, a B állítás hamis, akkor úgy is mondhatjuk, hogy az A logikai értéke igaz, B logikai értéke hamis. Jelekkel: $|A| = i$ és $|B| = h$.
Az igaz értéket szokták 1-gyel, a hamis értéket 0-val jelölni.

DEFINÍCIÓ: A kijelentéseket összekapcsolhatjuk. Azokat a kijelentéseket, amelyeket más kijelentésekből lehet előállítani, **összetett kijelentés**eknek nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Ha az összetett kijelentések logikai értéke csak az őt alkotó állítások logikai értékétől és az előállítás módjától függ, akkor **logikai művelet**ekről beszélünk.
A logikai műveleteket **igazságtábla** segítségével végezhetjük el.

DEFINÍCIÓ: Az állítás **tagadás**a egyváltozós művelet. Egy A kijelentés negációja (tagadása) az a kijelentés, amely akkor igaz, ha A hamis és akkor hamis, ha A igaz.
Jele: $\overline{A}$ vagy $\neg A$.

TÉTEL: Egy állítás tagadásának tagadása maga az állítás (kettős tagadás törvénye). Jele: $\overline{\overline{A}} = A$.

TÉTEL: Egy állítás és tagadása nem lehet egyszerre igaz (ellentmondásmentesség elve).

TÉTEL: Egy állítás és tagadása nem lehet egyszerre hamis (a harmadik kizárásának elve).

DEFINÍCIÓ: Két, A-tól és B-től függő állítás akkor egyenlő, ha A és B minden lehetséges logikai értékére a két állítás igazságértéke egyenlő.
A logikai műveletek eredménye csak a tagok logikai értékétől függ.

DEFINÍCIÓ: Állítások **diszjunkció**ja: logikai „vagy”: Két kijelentés diszjunkciója pontosan akkor igaz, ha legalább az egyik kijelentés igaz, különben hamis.
Jele: $A \vee B$.

DEFINÍCIÓ: Állítások **konjunkció**ja: logikai „és”: Két kijelentés konjunkciója pontosan akkor igaz, ha mindkét kijelentés igaz, különben hamis.
Jele: $A \wedge B$.

Logikai műveletek tulajdonságai:

Tulajdonság	Diszjunkció	Konjunkció
Kommutatív (felcserélhető)	$A \vee B = B \vee A$	$A \wedge B = B \wedge A$
Asszociatív (csoportosítható)	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
Disztributív (széttagolható)	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
De-Morgan azonosságok	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ és $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$	
További azonosságok	$A \vee A = A$ $A \vee \overline{A} = i$ $\overline{\overline{A}} = A$	$A \wedge A = A$ $A \wedge \overline{A} = h$

DEFINÍCIÓ: Állítások implikációja: A „ha A, akkor B” kapcsolatnak megfelelő logikai műveletet implikációnak nevezzük. Az implikáció logikai értéke pontosan akkor hamis, ha A igaz és B hamis, különben az implikáció igaz. Az A állítást feltételnek, B-t következménynek nevezzük.
A következtetés csak akkor hamis, ha a feltétel igaz, de a következmény hamis. Hamis állításból bármi következhet.
Jele: $A \to B$.

DEFINÍCIÓ: Állítások ekvivalenciája: Az „A akkor és csak akkor B” kapcsolatnak megfelelő logikai műveletet ekvivalenciának nevezzük. Az ekvivalencia logikai értéke pontosan akkor igaz, ha A és B logikai értéke azonos, különben hamis.
Ha az $A \leftrightarrow B$ igaz, akkor azt mondjuk, hogy A és B állítások ekvivalensek egymással.
Jele: $A \leftrightarrow B$.
Igazságtáblával:

A	B	$A \to B$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

A	B	$A \leftrightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

TÉTEL: Tetszőleges A és B kijelentésekre $A \to B = \overline{A} \vee B$.

BIZONYÍTÁS: Igazságtáblázattal:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$	$A \to B$
i	i	h	i	i
i	h	h	h	h
h	i	i	i	i
h	h	i	i	i

A negyedik oszlop igazságértékei megegyeznek az implikáció igazságértékeivel, tehát az egyenlőség A és B minden lehetséges logikai értékére fennáll, azaz azonosság. □

TÉTEL: Tetszőleges A és B kijelentésekre $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

BIZONYÍTÁS: Igazságtáblázattal:

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	$A \leftrightarrow B$
i	i	i	i	i	i
i	h	h	i	h	h
h	i	i	h	h	h
h	h	i	i	i	i

Az ötödik oszlop igazságértékei megegyeznek az ekvivalencia igazságértékeivel, tehát az egyenlőség A és B minden lehetséges logikai értékére fennáll, azaz azonosság. □

III. Állítás és megfordítása, szükséges és elégséges feltétel

Az állításokat gyakran „Ha A igaz, akkor B igaz” ($A \Rightarrow B$) formában fogalmazzuk meg. Tehát egy A állítás igazságából következik egy B állítás igazsága (vagyis, ha az $A \rightarrow B$ implikáció igaz), azt mondjuk, hogy az A állításból következik B állítás, vagy azt, hogy A állítás a B állításnak **elégséges feltétele** (hiszen a B állítás igazságának bizonyításához elég az A állítás igazságát bizonyítani).
Ilyenkor a B állítás az A állításnak **szükséges feltétele** (hiszen az A állítás nem lehet igaz, ha a B állítás nem igaz). Ha ilyen esetben az A állítás igazságából a B állítás igazságára következtetünk, az **helyes következtetés**.
Ha azt akarjuk kimutatni, hogy az A állításból **nem** következik a B állítás, elég egyetlen példát mutatni olyan esetre, amikor A igaz és B hamis. Ha ilyen esetben A állításból a B állításra következtetünk, az nem helyes, vagyis **helytelen következtetés**.
Ha az A állításból következik B állítás, és fordítva is: a B állításból következik az A állítás, akkor azt mondjuk, hogy az A állításnak a B állítás **szükséges és elégséges feltétele**. Jele: $A \Leftrightarrow B$ (A akkor és csak akkor igaz, amikor B).
Ez azt jelenti, hogy A és B egyszerre igaz, vagyis **ekvivalensek** (egyenértékűek).

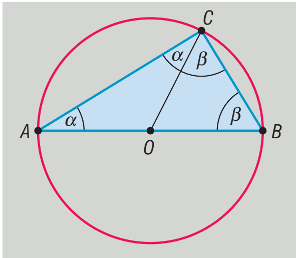
Példák feltételekre:

- Állítás: Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel. Ez igaz állítás.
  Ekkor a 4-gyel való oszthatóság elégséges feltétele a 2-vel való oszthatóságnak, a 2-vel való oszthatóság szükséges feltétele a 4-gyel való oszthatóságnak. Vagyis a 4-gyel való oszthatóság elégséges, de nem szükséges feltétele a 2-vel való oszthatóságnak, valamint a 2-vel való oszthatóság szükséges, de nem elégséges feltétele a 4-gyel való oszthatóságnak.
- Állítás: Ha egy szám osztható 2-vel, akkor osztható 4-gyel. Ez hamis állítás.
  Ekkor a 2-vel való oszthatóság nem elégséges feltétele a 4-gyel való oszthatóságnak, a 4-gyel való oszthatóság elégséges feltétele a 2-vel való oszthatóságnak. Vagyis a 2-vel való oszthatóság nem elégséges, de szükséges feltétele a 4-gyel való oszthatóságnak, valamint a 4-gyel való oszthatóság elégséges, de nem szükséges feltétele a 2-vel való oszthatóságnak.

Egy tétel feltételeinek és feltételei következményeinek a felcserélésével kapjuk a **tétel megfordítását**.
Így a fenti tétel megfordítása: „Ha B igaz, akkor A igaz.” ($B \Rightarrow A$)
Ha a tétel és a megfordítása is igaz, akkor a két tétel ekvivalens. ($A \Leftrightarrow B$)
Erre példa a Thalész-tétel, illetve a Pitagorasz tétel:

TÉTEL: Thalész-tétel: ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk.

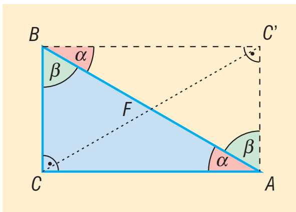
BIZONYÍTÁS: O középpontú kör, AB átmérő, C tetszőleges pont a körvonalon.



$OA = OC = r \Rightarrow OAC$ háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow OAC\sphericalangle = OCA\sphericalangle = \alpha$.
$OC = OB = r \Rightarrow OBC$ háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow OBC\sphericalangle = BCO\sphericalangle = \beta$.
Az ABC háromszög belső szögeinek összege 180º $\Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180º \Rightarrow \alpha + \beta = 90º \Rightarrow$ $ACB\sphericalangle = 90º$. □

TÉTEL: Thalész-tétel megfordítása: ha egy háromszög derékszögű, akkor köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja.

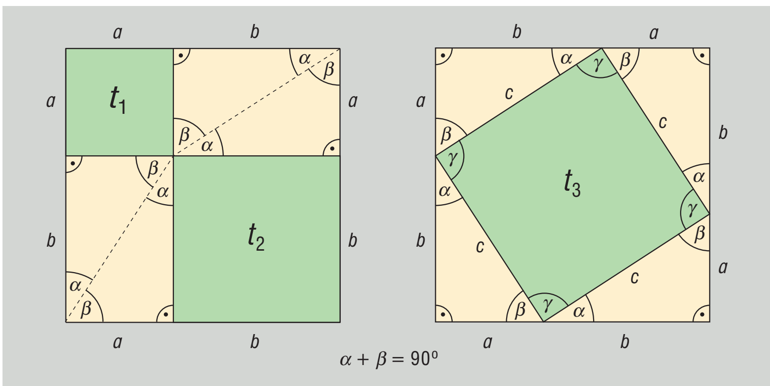
BIZONYÍTÁS: ABC derékszögű háromszöget tükrözzük az átfogó F felezőpontjára. A tükrözés tulajdonságai miatt $BC = AC'$ és $CA = BC'$ és $AC' = BC'$ szögei 90º-osak. A téglalap átlói egyenlők és felezik egymást $\Rightarrow FA = FB = FC \Rightarrow F$ az ABC háromszög köré írt kör középpontjával egyenlő. □



TÉTEL: Thalész-tétel és megfordítása összefoglalva: a sík azon pontjainak halmaza, amelyekből egy megadott szakasz derékszögben látszik, a szakaszhoz, mint átmérőhöz tartozó kör, elhagyva belőle a szakasz végpontjait.

TÉTEL: Pitagorasz-tétel: ha egy háromszög derékszögű, akkor a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

BIZONYÍTÁS: (14. tétel)



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 + b^2 + 4t = c^2 + 4t$$ □

TÉTEL: Pitagorasz-tétel megfordítása: ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetének összege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

BIZONYÍTÁS: (14. tétel)

Tudjuk, hogy $a^2 + b^2 = c^2$.

Tegyük fel, hogy a háromszög nem derékszögű. Ekkor tudunk szerkeszteni olyan derékszögű háromszöget, aminek a befogói a és b, átfogója legyen c'. Mivel ez derékszögű háromszög, a Pitagorasz-tétel miatt: $a^2 + b^2 = (c')^2$. Az eredeti feltétellel összevetve $c^2 = (c')^2$, amiből pozitív mennyiségekről lévén szó, következik, hogy $c = c'$.

Ez ellentmond a kiinduló feltételnek, így a háromszög derékszögű. □

IV. Alkalmazások:

- Matematikai definíciók, tételek pontos kimondása, tételek bizonyítása
- Tétel megfordításának kimondása
- Bizonyítási módszerek kidolgozása (direkt, indirekt, skatulya elv, teljes indukció)
- Kombinatorika, valószínűségszámítás használja a logikai műveleteket és azok tulajdonságait.
- Automaták tervezése problémák részekre bontásával.
- A logikai műveletek és halmazműveletek párhuzamba állíthatók.
- Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása során sokszor végzünk logikai műveleteket (ekvivalens átalakítások).

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Az ókori filozófia vetette fel azokat a kérdéseket, amelyek vizsgálata a logika kialakulásához vezetett. A görög „logosz” szó jelentése gondolat, igazság, a görög „logiké” szó érvelést, következtetést jelent. A logika segíti a definíciók, állítások pontos megfogalmazását, fontos szerepe van a problémák megfogalmazásában, a tudományos, alkotó kommunikációban.
- **Boole** (1815–1864) angol matematikus vezette be a kijelentések szerkezetének szimbólumokkal és műveletekkel való leírását. Az általa létrehozott algebra célja az volt, hogy összekösse a logikát a matematikával, ez a Boole-algebra. Az 1930-as években **Shannon** (1916–2001) amerikai matematikus a Boole-algebrát felhasználva az elektromos kapcsolók tulajdonságait használta a logikai műveletekhez, ez lett az elméleti alapja a digitális korszaknak, az információelméletnek.
- **de Morgan** (1806–1871) angol matematikus bevezette a ma De Morgan azonosságként ismert szabályokat. Ezzel nagyban hozzájárult a matematikai logika megreformálásához, jelölésrendszerének egyszerűbbé tételéhez.

5. Hatványozás, hatványfogalom kiterjesztése, a hatványozás azonosságai. Az n-edik gyök fogalma. A négyzetgyök azonosságai. Hatványfüggvények és a négyzetgyökfüggvény.

Vázlat:

I. Pozitív egész kitevőjű hatványok, hatványozás azonosságai
II. Permanencia-elv
III. Negatív egész, törtkitevős, irracionális kitevőjű hatvány
IV. Az n-edik gyök fogalma ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \neq 1$).
V. A négyzetgyök azonosságai
VI. Hatványfüggvények és azok tulajdonságai
VII. Négyzetgyökfüggvény és tulajdonságai
VIII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Pozitív egész kitevőjű hatványok

A hatványozást ugyanaz az igény hívta létre, mint a szorzást. A szorzás az ismételt összeadást jelenti, a hatványozást azonos számok szorzására vezették be, később kiterjesztették értelmezését.

DEFINÍCIÓ: Ha a tetszőleges valós szám és n 1-nél nagyobb természetes szám, akkor a^n **hatvány** azt az n tényezős szorzatot jelenti, amelynek minden tényezője a.
Ha $n = 1$, akkor $a^1 = a$.
Az a számot a hatvány alapjának, az n számot a hatvány kitevőjének nevezzük, ez utóbbi megmutatja, hogy a hatványalapot hányszor kell szorzótényezőül venni.

A hatványozás azonosságai pozitív egész kitevő esetén: ($a, b \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}^+$)

TÉTEL: Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a közös alapot a kitevők összegére emeljük:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

BIZONYÍTÁS:

$$a^m \cdot a^n \underset{\text{hatv. def.}}{=} \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m\,\text{db}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\,\text{db}} \underset{\substack{\text{szorzás}\\ \text{asszoc.}}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n\,\text{db}} \underset{\text{hatv. def.}}{=} a^{m+n}. \square$$

TÉTEL: Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy a közös alapot a kitevők különbségére emeljük:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ ha } a \neq 0,\ m > n.$$

BIZONYÍTÁS:

$$\frac{a^m}{a^n} \underset{\text{hatv. def.}}{=} \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m\,\text{db}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\,\text{db}}} \underset{\substack{\text{egysze-}\\ \text{rűsítés}}}{=} \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m-n\,\text{db}}}{1} \underset{\text{hatv. def.}}{=} a^{m-n}. \square$$

TÉTEL: Szorzatot tényezőként is hatványozhatunk:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Tétel „visszafele” olvasva: Azonos kitevőjű hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.

BIZONYÍTÁS:

$$(a\cdot b)^n \underset{\text{hatv. def.}}{=} \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{n\text{ db}} \underset{\substack{\text{szorzás}\\\text{asszoc.}}}{=} a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot\ldots\cdot a\cdot b \underset{\substack{\text{szorzás}\\\text{kommut.}}}{=}$$

$$= \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ db}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ db}} \underset{\text{hatv. def.}}{=} a^n\cdot b^n. \square$$

TÉTEL: Törtet úgy is hatványozhatunk, hogy a számlálót és a nevezőt külön-külön hatványozzuk és a kapott hatványoknak a kívánt sorrendben a hányadosát vesszük.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ ha } b \neq 0.$$

Tétel „visszafele” olvasva: Azonos kitevőjű hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapok hányadosát a közös kitevőre emeljük.

BIZONYÍTÁS:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \underset{\text{hatv. def.}}{=} \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{n\text{ db}} \underset{\substack{\text{törtek}\\\text{szorzása}}}{=} \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ db}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ db}}} \underset{\text{hatv. def.}}{=} \frac{a^n}{b^n}. \square$$

TÉTEL: Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük:

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}.$$

BIZONYÍTÁS:

$$(a^n)^m \underset{m\text{. hatv. def.}}{=} \underbrace{(a^n)\cdot(a^n)\cdot\ldots\cdot(a^n)}_{m\text{ db}} \underset{n\text{. hatv. def.}}{=} \underbrace{\Big(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ db}}\Big)\cdot\Big(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ db}}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ db}}\Big)}_{m\text{ db}} \underset{\substack{\text{szorzás}\\\text{asszoc.}}}{=}$$

$$= \underbrace{a\cdot a\cdot\dots\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\cdot n\text{ db}} \underset{\text{hatv. def.}}{=} a^{m\cdot n}. \square$$

II. Permanencia-elv

A hatványozás fogalmát kiterjesztjük minden egész kitevőre, majd egész kitevőről racionális kitevőre, majd racionálisról irracionális kitevőre úgy, hogy az előbbi, pozitív egész kitevőre teljesülő azonosságok továbbra is teljesüljenek. A fogalom értelmezésének kiterjesztése esetén ezt az igényt nevezzük **permanencia-elv**nek.

III. A hatványozás kiterjesztése

A 2. azonosság segítségével a hatványozás fogalma kibővíthető az **egész számok**ra a következő módon:

DEFINÍCIÓ: Tetszőleges $a \neq 0$ valós számra $a^0 = 1$. Minden nullától különböző valós számnak a **nulladik hatvány**a 1.

0^0-t nem értelmezzük (nem lehet úgy értelmezni, hogy összhangban legyen a hatványozás értelmezéseivel:

- $0^0 = 0$ kellene, mert 0 minden pozitív egész kitevő hatványa 0.
- $0^0 = 1$ kellene, mert minden egyéb szám nulladik hatványa 1.)

Bizonyítható, hogy ezzel az értelmezéssel a hatványozás azonosságai érvényben maradnak.
Pl.

$$\left.\begin{array}{l} a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n \\ a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n \end{array}\right\}$$

DEFINÍCIÓ: Tetszőleges $a \neq 0$ valós szám és n pozitív egész szám esetén $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Minden 0-tól különböző valós szám **negatív egész kitevőjű hatványa** a szám megfelelő pozitív kitevőjű hatványának a reciproka (vagy a szám reciprokának a megfelelő pozitív kitevőjű hatványa).

Bizonyítható, hogy ezzel az értelmezéssel a hatványozás azonosságai érvényben maradnak.
Pl.

$$\left.\begin{array}{l} a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \\ a^{-n} \cdot a^n = \dfrac{1}{a^n} \cdot a^n = \dfrac{a^n}{a^n} = 1 \end{array}\right\}$$

Ezzel a két definícióval a 2. azonosság igaz minden $n, m \in \mathbb{Z}$-re:

Ha $n = m$, akkor $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a^m}{a^m} = 1$.

Ha $m < n$, akkor m darab a-val egyszerűsítünk, a számlálóban 1, a nevezőben pedig $n - m$ darab a szorzótényező marad, ami a hatvány definíciója miatt $\dfrac{1}{a^{n-m}}$. Alkalmazva a negatív egész kitevőjű hatvány definícióját $\dfrac{1}{a^{n-m}} = \dfrac{1}{a^{-(m-n)}} = a^{m-n}$.

A hatványozás fogalmát ezután **racionális kitevő**re terjesztjük ki:

DEFINÍCIÓ: Az a pozitív valós szám $\dfrac{p}{q}$-adik hatványa az a pozitív valós szám, amelynek q-adik hatványa a^p, azaz $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$.

A definícióból következik: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Az alap csak pozitív szám lehet, mert például

$(-2)^{\frac{2}{4}} = \left[(-2)^2\right]^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ értelmes,

$(-2)^{\frac{2}{4}} = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ nem értelmezhető, pedig a két hatvány értékének (azonos alap, azonos kitevő) meg kell egyeznie.

Bizonyítható, hogy ezzel az értelmezéssel a hatványozás azonosságai érvényben maradnak.
Pl.

$$\left.\begin{array}{l} \left(a^{\frac{k}{n}}\right)^n = a^{\frac{k}{n}\cdot n} = a^k \\ \left(a^{\frac{k}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n = a^k \end{array}\right\}$$

A hatványozást kiterjeszthetjük tetszőleges **valós kitevő**re. Ehhez az **irracionális kitevő**t kell értelmeznünk.

Az értelmezés azon alapul, hogy bármely irracionális szám tetszőlegesen közelíthető két oldalról racionális számokkal. Így ha pl.: $2^{\sqrt{2}}$ hatványt szeretnénk meghatározni, akkor ehhez a $\sqrt{2}$ értékét közelítjük nála kisebb, illetve nála nagyobb racionális számokkal, majd a közelítő értékekre, mint kitevőre emeljük a 2-t. Bizonyítható, hogy $2^{\sqrt{2}}$ értéke létezik, és ily módon tetszőlegesen közelíthető (rendőr elv).

DEFINÍCIÓ: Az a pozitív valós szám α **irracionális kitevőjű hatvány**a, azaz a^{α} jelentse az a^r sorozat határértékét, ahol r egy racionális számsorozat tagjait jelöli és $r \to \alpha$. Képlettel: $\lim\limits_{r \to \alpha} a^r = a^{\alpha}$.

IV. Az n-edik gyök fogalma

A gyökvonás művelete a hatványkitevő és a hatvány ismeretében az alap kiszámolását teszi lehetővé. A gyökvonás a hatványozás egyik fordított művelete: az a valós szám n-edik gyöke ($n \in \mathbb{Z}^+$, $n \neq 1$) az $x^n = a$ egyenlet megoldása.

Az a szám n-edik gyökének jelölése: $\sqrt[n]{a}$, ha $n \in \mathbb{N}^+$.
A gyökvonás értelmezésénél különbséget kell tenni a páros és páratlan gyökkitevő között (hiszen páros n-re és negatív a-ra az $x^n = a$ egyenletnek nincs megoldása, mivel a valós számok páros kitevőjű hatványa nem lehet negatív. Tehát páros n-re és negatív a-ra az a szám n-edik gyöke nem értelmezhető.)

DEFINÍCIÓ: Egy a valós szám $(2k + 1)$-edik ($k \in \mathbb{N}^+$) gyökén azt a valós számot értjük, amelynek $(2k + 1)$-edik hatványa a.

Képlettel: $\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$.

DEFINÍCIÓ: Egy nemnegatív valós a szám $2k$-adik ($k \in \mathbb{N}^+$) gyökén azt a nemnegatív valós számot értjük, amelynek $2k$-adik hatványa a.

Képlettel: $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$, ahol $a \geq 0$, $\sqrt[2k]{a} \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

DEFINÍCIÓ: Egy nemnegatív valós a szám **négyzetgyök**én azt a nemnegatív valós számot értjük, amelynek négyzete a.

Képlettel: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, ahol $a \geq 0$, $\sqrt{a} \geq 0$.

A páros és páratlan gyökkitevőre vonatkozó definíciók közötti különbségből adódóan: $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = |a|$ és $\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$, pl. $\sqrt[6]{(-5)^6} = 5$, de $\sqrt[5]{(-5)^5} = -5$.

V. A négyzetgyök azonosságai

TÉTEL: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, ha a, b nemnegatív valós számok.

Szorzat négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával. Tehát szorzatból tényezőnként vonhatunk gyököt.

BIZONYÍTÁS: Vizsgáljuk mindkét oldal négyzetét:

$$\left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2 = a \cdot b,$$

a négyzetgyök definíciója miatt.

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b,$$

a szorzat hatványának azonossága és a négyzetgyök definíciója miatt.
A két oldal négyzete egyenlő.

Ha mindkét oldal értelmes, vagyis nemnegatív, akkor a hatványozás azonosságából következik a két oldal egyenlősége.□

TÉTEL: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, ha a, b nemnegatív valós számok, $b \neq 0$.

Tört négyzetgyöke egyenlő a számláló és a nevező négyzetgyökének hányadosával.

TÉTEL: $\sqrt{a^k} = \left(\sqrt{a}\right)^k$, ha k egész, $a > 0$ valós szám.

A hatványozás és a gyökvonás sorrendje felcserélhető egymással pozitív alap esetén. Figyelni kell arra, hogy a négyzetre emelés és a négyzetgyökvonás sorrendje nem cserélhető fel, ha az alap negatív. Így általánosan: $\sqrt{a^2} = |a|$.

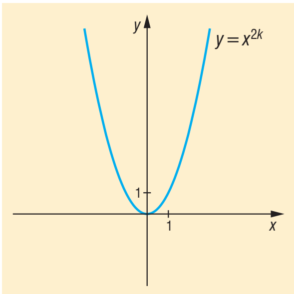
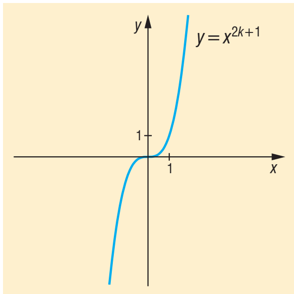
VI. Hatványfüggvények és azok tulajdonságai

DEFINÍCIÓ: Az f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ függvényt, ahol $n \in \mathbb{N}^+$, hatványfüggvénynek nevezzük.

A hatványfüggvények értelmezhetőek $n = 0$ esetre is, de ettől most eltekintünk.

A hatványfüggvény vizsgálatát két részre kell bontanunk aszerint, hogy n páros-e vagy páratlan.

Jellemzés:

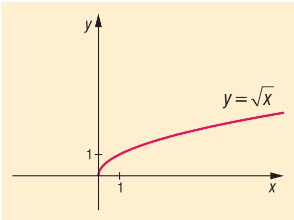
A függvény	f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k}$	g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{2k+1}$
ábrázolása:		
értelmezési tartománya:	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$
értékkészlete:	nemnegatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$
monotonitása:	ha $x < 0$, akkor szigorúan monoton csökken, ha $x > 0$, akkor szigorúan monoton nő	szigorúan monoton nő
szélsőértéke:	abszolút minimuma van az $x = 0$ helyen, a minimum értéke $f(x) = 0$.	nincs
görbülete:	alulról konvex	ha $x < 0$, akkor alulról konkáv, ha $x > 0$, akkor alulról konvex
zérushelye:	$x = 0$	$x = 0$
paritása:	páros: $f(-x) = f(x)$	páratlan, vagyis $g(-x) = -g(x)$
korlátosság:	alulról korlátos, felülről nem korlátos.	nem korlátos
invertálhatóság:	invertálható, ha $x \geq 0$: inverze az f^{-1}: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x}$ függvény	invertálható: inverze az g^{-1}: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ függvény

Görbület szempontjából külön kell venni az $n = 1$ esetet: ekkor a függvény se nem konvex, se nem konkáv.
A hatványfüggvények folytonosak, minden pontban deriválhatóak, minden korlátos intervallumon integrálhatóak.

VII. Négyzetgyökfüggvény és tulajdonságai

DEFINÍCIÓ: Az $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ függvényeket négyzetgyökfüggvényeknek nevezzük.

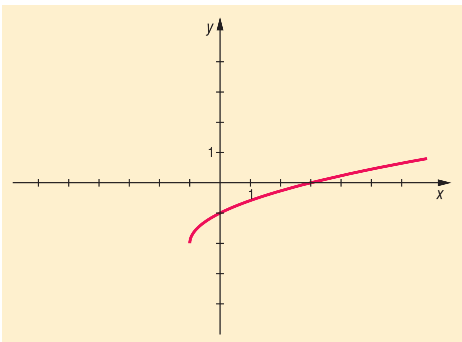
Jellemzés:

A függvény	$f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$
ábrázolása:	
értelmezési tartománya:	nemnegatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$
értékkészlete:	nemnegatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$
monotonitása:	szigorúan monoton nő
szélsőértéke:	abszolút minimuma van az $x = 0$ helyen, a minimum értéke $f(x) = 0$.
görbülete:	alulról konkáv
zérushelye:	$x = 0$
paritása:	nincs: nem páros, nem páratlan
korlátosság:	alulról korlátos, felülről nem korlátos
invertálhatóság:	invertálható: inverze az $f^{-1}\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = x^2$ függvény

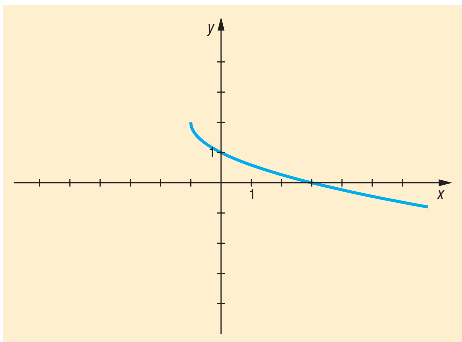
A gyökfüggvények folytonosak, differenciálhatóak, integrálhatóak.

Példák négyzetgyökfüggvényre:

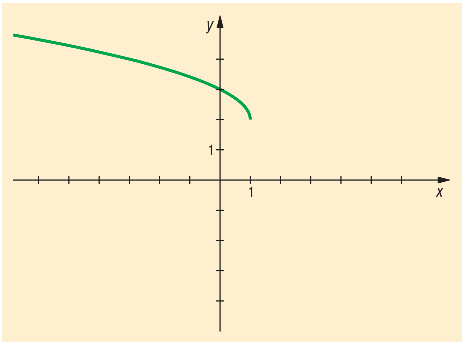
$f(x) = \sqrt{x+1} - 2$



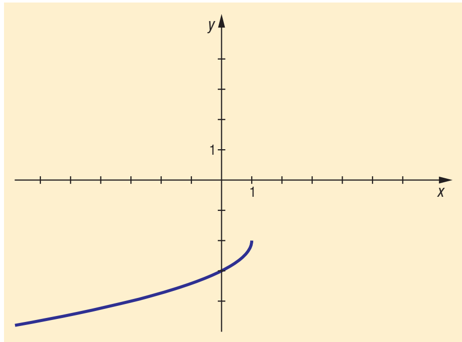
$f(x) = -\sqrt{x+1} + 2$



$f(x) = \sqrt{1-x} + 2 = \sqrt{-(x-1)} + 2$



$f(x) = -\sqrt{1-x} - 2 = -\sqrt{-(x-1)} - 2$



VIII. Alkalmazások:

Hatványozás:

- Prímtényezős felbontásban pozitív egész kitevőjű hatványok, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, osztók száma
- Normálalakban: egyszerűbb a kicsi és a nagy számokkal való műveletek elvégzése
- A számrendszerek felépítése a hatványozáson alapul
- Mértani sorozat: a_n, S_n kiszámolása
- Ismétléses variációk száma: n^k
- Hasonló testek felszínének aránya λ^2, térfogatának aránya λ^3
- Kamatos kamat számítása
- Négyzetes úttörvény: $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$
- Radioaktív bomlás
- Mértékegységváltás
- Binomiális eloszlás
- Nevezetes azonosságok

Gyökvonás:

- Magasabb fokú egyenletek megoldása
- Pitagorasz-tétel (négyzetre emelés, gyökvonás)
- Mértani közép (gyökvonás)
- Magasság-, illetve befogótétel (négyzetre emelés, gyökvonás)
- Kocka élének, vagy gömb sugarának kiszámolása a térfogatból
- l hosszúságú fonálinga lengésideje: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
- h magasságból szabadon eső test sebessége: $v = \sqrt{2gh}$
- Kamatos kamatnál a kamattényező kiszámítása
- Harmonikus rezgőmozgás körfrekvenciájának kiszámítása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Már időszámításunk kezdetén ismerték kínai matematikusok a négyzetgyök és köbgyök fogalmát, a mai jelölésrendszere a XVI. században alakult ki.
- A 13. századi kínai matematikusok az egyenletet meg tudták oldani, azaz tetszőleges pozitív számból tudtak gyököt vonni.
- **Oresmicus** (1323–1382) francia matematikus foglalkozott először a törtkitevős hatványokkal.
- **Stifel** (1487–1567) német matematikus írta le a nulladik és a negatív egész kitevőjű hatványokat.

6. A logaritmus fogalma és azonosságai. Az exponenciális és a logaritmusfüggvény.

Vázlat:

I. A logaritmus definíciója
II. A logaritmus azonosságai
III. Exponenciális függvény, tulajdonságai
IV. Logaritmusfüggvény, tulajdonságai
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Logaritmus definíciója

Az $a^x = b$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$) egyenlet megoldásakor az x kitevőt keressük. Ennek az egyenletnek az egyetlen megoldása $x = \log_a b$.

DEFINÍCIÓ: A logaritmus a hatványozás egyik fordított művelete: $\log_a b$ (***a* alapú logaritmus *b***) az az egyetlen valós kitevő, melyre a-t emelve b-t kapunk: $a^{\log_a b} = b$, ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$), vagyis $\log_a b = c$ egyenértékű azzal, hogy $a^c = b$. (A kitevőt fejezzük ki a hatványalap és a hatványérték ismeretében.)

Elnevezések: a = **logaritmus alapja**, b = **hatványérték**.

A logaritmus alapját azért választjuk pozitív számnak, mert

- negatív alap esetén a törtkitevős hatvány nem értelmezhető.
- ha az alap 0 lenne, akkor a hatványérték bármilyen (0-tól különböző) kitevőre 0, így a kitevőkeresés nem egyértelmű.
- ha az alap 1 lenne, a hatványérték a kitevő bármely értékére 1, így sem egyértelmű a kitevőkeresés.

Ha a logaritmus alapja 10, akkor a jelölés: $\log_{10} x = \lg x$. Ha a logaritmus alapja e, akkor természetes alapú logaritmusról beszélünk, így a jelölés: $\log_e x = \ln x$.

II. Logaritmus azonosságai

TÉTEL: Szorzat logaritmusa egyenlő a tényezők logaritmusának összegével:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \text{ ahol } x, y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

BIZONYÍTÁS: A logaritmus definíciója alapján:

$$x = a^{\log_a x} \text{ és } y = a^{\log_a y}, \text{ illetve } x \cdot y = a^{\log_a (x \cdot y)}$$

Nézzük az állítás bal oldalát:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}) = \log_a a^{\log_a x + \log_a y} = \log_a x + \log_a y,$$

az azonos alapú hatványok szorzása és a logaritmus definíciója miatt.

Így a bizonyítandó állítás igaz.□

TÉTEL: Tört logaritmusa megegyezik a számláló és a nevező logaritmusának különbségével:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \text{ ahol } x, y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

TÉTEL: Hatvány logaritmusa az alap logaritmusának és a kitevőnek a szorzata:

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x, \text{ ahol } x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ k \in \mathbb{R}.$$

TÉTEL: Áttérés más alapú logaritmusra:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ ahol } a, b, c > 0,\ a, c \neq 1.$$

BIZONYÍTÁS: A logaritmus definíciója alapján: $b = a^{\log_a b}$.

Írjuk fel: $\log_c b = \log_c a^{\log_a b} = \log_a b \cdot \log_c a$,

a logaritmus definíciója és a hatvány logaritmusa miatt.

Kaptuk: $\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$ /: $\log_c a \neq 0$ a feltételek miatt.

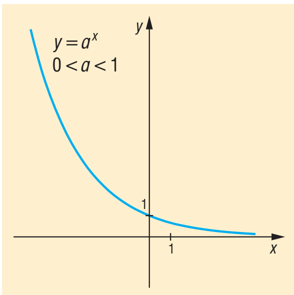
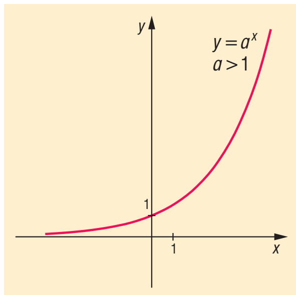
Így: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. Ez a bizonyítandó állítás.□

III. Exponenciális függvény:

DEFINÍCIÓ: Az f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ függvényt exponenciális függvénynek nevezzük.

Az $a = 1$ esetén az exponenciális függvény konstans: $f(x) = 1^x = 1$.

Jellemzés:

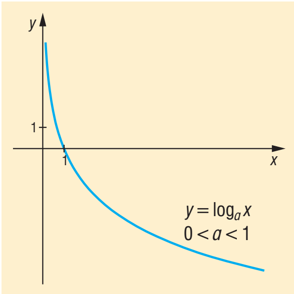
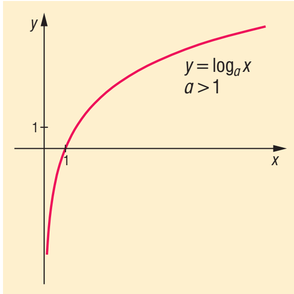
A függvény	f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ esetben	g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a^x$, $1 < a$ esetben
ábrázolása:		
értelmezési tartománya:	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$
értékkészlete:	pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$	pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$
monotonitása:	szigorúan monoton csökken	szigorúan monoton nő
szélsőértéke:	nincs	nincs
görbülete:	alulról konvex	alulról konvex
zérushelye:	nincs	nincs
paritása:	nincs: nem páros, nem páratlan	nincs: nem páros, nem páratlan
korlátosság:	alulról korlátos, felülről nem korlátos	alulról korlátos, felülről nem korlátos
invertálhatóság:	invertálható: inverze az f^{-1}: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ függvény	invertálható: inverze az g^{-1}: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \log_a x$ függvény

Az exponenciális függvény folytonos, differenciálható, integrálható.

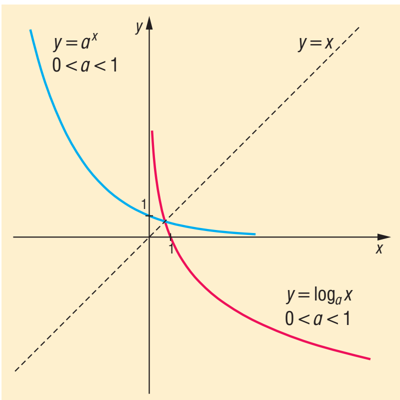
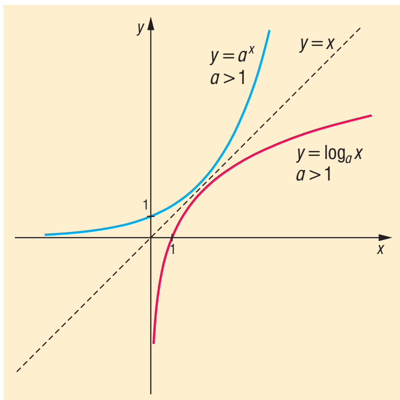
IV. Logaritmusfüggvény

DEFINÍCIÓ: Az $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$ függvényt logaritmusfüggvénynek nevezzük.

Jellemzés:

A függvény	$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$ esetben	$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_a x$, $1 < a$ esetben
ábrázolása:		
értelmezési tartománya:	pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$	pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$
értékkészlete:	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$
monotonitása:	szigorúan monoton csökken	szigorúan monoton nő
szélsőértéke:	nincs	nincs
görbülete:	alulról konvex	alulról konkáv
zérushelye:	$x = 1$	$x = 1$
paritása:	nincs: nem páros, nem páratlan	nincs: nem páros, nem páratlan
korlátosság:	nem korlátos	nem korlátos
invertálhatóság:	invertálható: inverze az $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = a^x$ $(0 < a < 1)$ függvény	invertálható: inverze az $g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = a^x$ $(1 < a)$ függvény

A logaritmusfüggvény folytonos, differenciálható, integrálható.
Kapcsolat az exponenciális és a logaritmusfüggvények között:

$0 < a < 1$	**$1 < a$**
	

Az exponenciális függvény $a \neq 1$ esetén invertálható, inverze az $f^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$; $a > 0$, $a \neq 1$ logaritmusfüggvény.

A logaritmusfüggvény invertálható, inverze az $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = a^x$; $a > 0$, $a \neq 1$ exponenciális függvény.

Kiegészítés:

DEFINÍCIÓ: Az f függvény inverze a g függvény, ha az f értelmezési tartományának minden x elemére igaz, hogy $f(x)$ eleme a g értelmezési tartományának és $g(f(x)) = x$. Az inverz függvény jelölése: $g = f^{-1}$.
Ha az f és a g függvények egymásnak inverzei, akkor az f értelmezési tartománya a g értékkészlete, az f értékkészlete a g értelmezési tartománya.
Ha két függvény egymásnak inverzei, akkor grafikonjaik egymásnak tükörképei az $y = x$ egyenletű egyenesre.

V. Alkalmazások:

- $2^x = 3$ egyenlet megoldása logaritmussal
- matematikai műveletek visszavezetése egyszerűbb műveletek elvégzésére (szorzás helyett összeadás, hatványozás helyett szorzás)
- kamatos kamatszámításnál az alaptőke, az n-edik év végi tőke, és a kamattényező ismeretében az n meghatározása:

$$t_n = t_0 \cdot q^n \;\Rightarrow\; \frac{t_n}{t_0} = q^n \;\Rightarrow\; \lg\frac{t_n}{t_0} = \lg q^n \;\Rightarrow\; \lg\frac{t_n}{t_0} = n \cdot \lg q \;\Rightarrow\; n = \frac{\lg t_n - \lg t_0}{\lg q}$$

- számolás gépbe nem férő nagy számokkal, pl.:

$$x = \frac{85^{200}}{130^{120}} \;\Rightarrow\; \lg x = 200 \cdot \lg 85 - 120 \cdot \lg 130 = 132{,}21$$
$$x = 10^{132{,}21} = 10^{132} \cdot 10^{0{,}21} = 1{,}6218 \cdot 10^{132}$$

- gravitációs erőtérben a barometrikus magasságformulában a levegő sűrűsége a magassággal exponenciálisan csökken
- a Richter-skála (földrengések méretét határozza meg) logaritmus alapú
- pH érték: az oldatok szabad oxónium-ion koncentrációjának negatív 10-es alapú logaritmusa: $pH = -\lg[H_3O^+]$
- exponenciális függvény írja le: a radioaktív izotópok bomlását, az oldódás folyamatát, a kondenzátor feltöltődésének és kisülésének folyamatát.

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A logaritmust **Napier** (1550–1617) skót matematikus találta ki, a logaritmus szót a logosz (viszony) és az aritmosz (szám) görög szavakból alkotta. Elsősorban matematikai számításokat megkönnyítését segítő módszereket talált ki, így a logaritmust, amely a csillagászati számításokban bizonyult hasznosnak. **Kepler** használta csillagászati táblázatai elkészítésekor. Napier feltalálta a róla elnevezett számolópálcákat, melyek segítségével a szorzás és az osztás gyorsabban volt elvégezhető. A trigonometrikus függvények logaritmusának táblázatát is elkészítette, táblázatában a logaritmus alapja $\frac{1}{e}$ volt.
- **Bürgi** (1552–1632) svájci órásmester és matematikus csillagászati eszközökkel is foglalkozott Kepler munkatársaként. Segített Keplernek a csillagászati számításokban, ehhez megalkotta az első logaritmustáblázatot.
- Az oxfordi egyetem tanára **Briggs** (1561–1630) angol matematikus és Napier közösen kidolgozták az első 10-es alapú 8 jegyű logaritmustáblázatot.
- Napier számolópálcáiból az 1600-as években kifejlesztették a logarlécet, amelyet az 1970-es évekig használtak. A **logarléc** és a logaritmustáblázatok több száz évig nélkülözhetetlen eszközei voltak a bonyolultabb számításokkal foglalkozó embereknek. Szerepük csak az elektromos számológépek és a számítógépek megjelenésével szűnt meg fokozatosan.

7. Egyenletmegoldási módszerek, ekvivalencia, gyökvesztés, hamis gyök. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek.

Vázlat:

I. Egyenlet, egyenlet gyökének fogalma
II. Egyenlet-megoldási módszerek
III. Ekvivalencia
IV. Gyökvesztés
V. Hamis gyök
VI. Másodfokú egyenletek, megoldásuk
VII. Új ismeretlennel másodfokúra vezető egyenletek
VIII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Egyenlet

DEFINÍCIÓ: Az **egyenlet** bármely két egyenlőségjellel összekötött kifejezés. A kifejezésben szereplő változók az **ismeretlen**ek.
Az egyenlet olyan változótól függő állítás (nyitott mondat), amelynek az alaphalmaza számhalmaz.

DEFINÍCIÓ: Az **alaphalmaz** az ismeretlenek azon értékeinek halmaza, ahol az egyenletet vizsgáljuk, ahol a megoldásokat keressük.

DEFINÍCIÓ: Az egyenlet **értelmezési tartománya** az alaphalmaznak az a legbővebb részhalmaza, ahol az egyenletben szereplő kifejezések értelmezhetőek.

DEFINÍCIÓ: Az egyenletet igazzá tevő értékek az **egyenlet megoldásai** vagy **gyökei**.

DEFINÍCIÓ: Az alaphalmaz azon elemeinek halmaza, amelyekre az egyenlet igaz, vagyis az egyenlet megoldásainak (vagy gyökeinek) halmaza az **egyenlet megoldáshalmaza** (vagy igazsághalmaza).

DEFINÍCIÓ: Az **azonosság** olyan egyenlet, amelynek a megoldáshalmaza megegyezik az egyenlet értelmezési tartományával.

II. Egyenlet-megoldási módszerek:

1. **Mérlegelv:** az egyenlet két oldalának egyforma változtatásának módszere.
   A mérlegelv szerint egy egyenlet gyökeinek halmaza nem változik, ha
   - az egyenlet mindkét oldalához ugyanazt a számot hozzáadjuk, vagy mindkét oldalából kivonjuk;
   - az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk, osztjuk.

2. **Grafikus megoldás:** Az egyenlet két oldalán álló kifejezést, mint függvényt ábrázoljuk. Ilyenkor a két grafikon közös pontjainak abszcisszái adják a megoldást.
   Hátránya: pontatlan lehet a leolvasás.

3. **Szorzattá alakítás:** Bonyolultnak tűnő vagy túl „magasfokú” egyenlet megoldásakor kiemeléssel vagy megfelelő csoportosítás utáni kiemeléssel szorzattá alakítjuk az egyik oldalt úgy, hogy a másik oldal 0 legyen. Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0. Ezzel egyszerűbb, vagy alacsonyabb fokú egyenlethez jutunk. Pl.:

$$(x-2)(x+4)x+(x-2)(3x-2)=0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x^2+4x+3x-2)=0.$$

4. **Értelmezési tartomány vizsgálata:** Bizonyos esetekben az értelmezési tartomány egyetlen szám, vagy üres halmaz. Ha egy szám, akkor ellenőrizzük, hogy valóban megoldás-e, ha üres halmaz, akkor nincs megoldás.
   - $\sqrt{x-1}-\sqrt{1-x}=0 \;\Rightarrow\; D_f=\{1\} \Rightarrow$ ellenőrzés $\Rightarrow$ $x=1$ az egyetlen megoldás.
   - $\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \;\Rightarrow\; D_f=\{\,\} \Rightarrow$ nincs megoldás.

5. **Értékkészlet vizsgálata:** Bonyolultnak tűnő vagy több ismeretlent tartalmazó egyenlet megoldásakor alkalmazhatjuk, ha az egyenlet tartalmaz pl. négyzetre emelést, négyzetgyökvonást, abszolút értéket, exponenciális kifejezést, szinuszt, koszinuszt.
   - $|x-3|+(y+4)^2+\sqrt{2z+4}=0 \;\Rightarrow\; x=3,\ y=-4,\ z=-2.$
   - $2^{3x-4}=-1$, de $2^{3x-4}>0\neq -1 \Rightarrow$ nincs megoldás
   - $\sqrt{x+1}=-2$, de $\sqrt{x+1}\geq 0\neq -2 \Rightarrow$ nincs megoldás
   - $\sqrt{\sin^2 x-2\sin x+1}+\sqrt{\sin^2 x-4\sin x+4}=4 \;\Rightarrow\; |\sin x-1|+|\sin x-2|=4$

$$\left.\begin{array}{l}\underbrace{\sin x-1}_{\text{negatív}}\in[-2,0]\Rightarrow|\sin x-1|=-\sin x+1\\ \underbrace{\sin x-2}_{\text{negatív}}\in[-3,-1]\Rightarrow|\sin x-2|=-\sin x+2\end{array}\right\}\Rightarrow -\sin x+1-\sin x+2=4\Rightarrow \sin x=-\frac{1}{2}$$

6. **Új ismeretlen bevezetése:** Bonyolultnak tűnő egyenlet megoldását visszavezetjük egy már ismert egyenlettípus megoldására. Pl.:

$$\mathrm{tg}^4 x-5\mathrm{tg}^2 x+4=0 \;\Rightarrow\; a:=\mathrm{tg}^2 x \;\Rightarrow\; a^2-5a+4=0$$

III. Ekvivalencia (egyenértékűség)

DEFINÍCIÓ: Két egyenlet ekvivalens, ha alaphalmazuk és megoldáshalmazuk is azonos.

DEFINÍCIÓ: Ekvivalens átalakítás az olyan átalakítás, amit egyenletek megoldása közben végzünk és ezzel az átalakítással az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk.

Ekvivalens átalakítás például az egyenlet mérlegelvvel történő megoldása. Nem ekvivalens átalakítás például változót tartalmazó kifejezéssel osztani az egyenlet mindkét oldalát, vagy négyzetre emelni az egyenlet mindkét oldalát.
Az egyenletek megoldása során nem mindig van lehetőségünk ekvivalens átalakításokat végezni. Ha lehet, ilyen esetekben vagy értelmezési tartomány, vagy értékkészlet vizsgálattal próbálunk feltételeket felállítani.
De még így is előfordulhat, hogy olyan átalakítást végzünk, amely során
- az új egyenletnek szűkebb az értelmezési tartománya, mint az eredetinek, ekkor gyökvesztés állhat fenn;
- az új egyenletnek bővebb az értelmezési tartománya, mint az eredetinek, ekkor gyöknyerés állhat fenn.

IV. Gyökvesztés

Gyökvesztés következhet be, ha a változót tartalmazó kifejezéssel osztjuk az egyenlet mindkét oldalát, vagy olyan átalakítást végzünk, amely szűkíti az értelmezési tartományt.

Pl. hibás megoldás:

$$x^3+2x^2+x=0$$
$$\Downarrow \xleftarrow{:x}$$
$$x^2+2x+1=0$$
$$x=-1$$

helyes megoldás:

$$x^3+2x^2+x=0$$
$$x(x^2+2x+1)=0$$
$$x=0$$
vagy
$$x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Pl. hibás megoldás:

$$\lg(x+2)^2=2\lg 5 \ \leftarrow \ D_f=R-\{-2\}$$
$$2\lg(x+2)=2\lg 5 \ \leftarrow \ D_f=]-2,\infty[$$
$$\lg(x+2)=\lg 5$$
$$x+2=5$$
$$x=3$$

helyes megoldás:

$$\lg(x+2)^2=2\lg 5 \ \leftarrow \ D_f=R-\{-2\}$$
$$\lg(x+2)^2=\lg 25$$
$$(x+2)^2=25$$
$$x+2=5 \ \Rightarrow \ x=3$$
vagy
$$x+2=-5 \ \Rightarrow \ x=-7$$

V. Hamis gyök

Hamis gyököt kapunk, ha az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, vagy mindkét oldalt az ismeretlent tartalmazó kifejezéssel szorozzuk, vagy olyan átalakítást végzünk, ami bővíti az értelmezési tartományt.

Pl. $\sqrt{7-x}=1-x \quad /(\,)^2$.

Eredeti feltétel: $7-x\ge 0 \ \Rightarrow \ x\le 7 \ \Rightarrow \ D_f=]-\infty, 7]$.

A gyöknyerés kiküszöbölhető közbülső feltétellel: $1-x\ge 0 \ \Rightarrow \ x\le 1 \ \Rightarrow \ D_{f_{új}}=]-\infty, 1]$.

$7-x=(1-x)^2 \ \Rightarrow \ x^2-x-6=0 \ \Rightarrow \ x_1=3\notin D_{f_{új}}, \ x_2=-2\in D_{f_{új}}$

Pl. $2x+\dfrac{1}{x-1}=2+\dfrac{1}{x-1} \quad / -\dfrac{1}{x-1} \ \Rightarrow \ 2x=2 \ \Rightarrow \ x=1.$

A gyöknyerés ekkor is kiküszöbölhető, ha az eredeti egyenletre írunk D_f-et.

Pl. $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+8}$.

Eredeti feltételek: $x+6\ge 0 \Rightarrow x\ge -6$; $x+2\ge 0 \Rightarrow x\ge -2$; $2x+8\ge 0 \Rightarrow x\ge -4$; $\Rightarrow D_f=[-1;\infty[$.

Ha az egyenletet először rendezzük úgy, hogy mindkét oldal nemnegatív legyen, négyzetre emeljük mindkét oldalt, rendezzük úgy, hogy a gyökös kifejezés az egyik oldalra kerüljön, a többi tag a másik oldalra, majd a négyzetre emelés előtt közbülső feltételt írunk, hogy a gyöknyerést kiküszöböljük:

$\sqrt{x+6}=\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+8} \ \rightarrow$ /négyzetre emelés

$x+6=x+2+2\cdot\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x+8}+2x+8 \ \rightarrow$ /rendezés

$-2x-4=2\cdot\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x+8} \rightarrow$ közbülső feltétel írása: a jobb oldal nemnegatív, a bal oldalnak is annak kell lennie, mivel egyenlők, azaz $-2x-4\ge 0 \ \Rightarrow \ x\le -2 \ \Rightarrow \ D_{f_{új}}=\{-2\}$. Ebben az esetben nem is kell elvégezni a négyzetre emelést, hiszen csak egy szám felel meg az értelmezésnek, ha van megoldás, akkor csak ez az egy szám lehet. Ennek ellenőrzésével eldönthető, hogy ez valóban megoldás-e.

Akár a gyökvesztés, akár a hamis gyök elkerülhető, ha az egyenlet megoldása során mindig figyelünk az értelmezési tartomány változására, ha lehet, az értékkészletet is vizsgáljuk, mert így szűkíteni lehet az alaphalmazt.

VI. Másodfokú egyismeretlenes egyenlet

DEFINÍCIÓ: Másodfokú egyismeretlenes egyenlet $ax^2 + bx + c = 0$ alakra hozható, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Megoldása lehetséges a megoldóképlettel, szorzattá alakítással, teljes négyzetté alakítással, Viète-formulával.

Pl. $x^2 + 3x = 0$ vagy $x^2 + 6x + 9 = 0$

TÉTEL: Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ egyenlet megoldóképlete: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ahol $b^2 - 4ac \geq 0$.

BIZONYÍTÁS:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad / \cdot 4a$$
$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

teljes négyzetté alakítással:

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0 \quad / + b^2 - 4ac$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Mivel a bal oldalon négyzetszám van, ami nem lehet negatív, így $b^2 - 4ac$ sem lehet az. (Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor nincs megoldás). Ha $b^2 - 4ac \geq 0$, akkor vonjunk mindkét oldalból gyököt, figyelve, hogy elkerüljük a gyökvesztést:

$$|2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \square$$

DEFINÍCIÓ: Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ **másodfokú egyenlet diszkriminánsa** $D = b^2 - 4ac$.

- Ha $D > 0$, akkor az egyenletnek két különböző valós gyöke van: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- Ha $D = 0$, akkor az egyenletnek két egymással egyenlő gyöke, vagyis 1 valódi gyöke van: $x = -\dfrac{b}{2a}$, ezt kétszeres gyöknek is nevezzük, mert $x_1 = x_2$.
- Ha $D < 0$, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke.

TÉTEL: A másodfokú egyenlet **gyöktényezős alak**ja:

Ha egy $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ egyenlet megoldható (azaz $D \geq 0$) és két gyöke van x_1 és x_2, akkor az $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ minden valós x-re igaz.

TÉTEL: Viète-formulák: másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggések:

Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ alakban felírt $(D \geq 0)$ másodfokú egyenlet gyökeire: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ és $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Grafikus megoldás: az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ függvény zérushelyei adják a megoldást. (Sőt $a > 0$ esetre törekszem!)

$$x \mapsto ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Olyan parabola a kép, amelynek tengelypontja $T\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

VII. Speciális egyenletek

Magasabb fokú, illetve bizonyos exponenciális, logaritmikus, abszolút értékes, gyökös, trigonometrikus egyenletek új ismeretlen bevezetésével másodfokú egyenletre vezethetők vissza.

$$\left.\begin{array}{l} x^6-3x^3-4=0 \\ 2^{2x}-3\cdot 2^x-4=0 \\ \lg^2 x-3\lg x-4=0 \\ (x-2)^2-3\left|x-2\right|-4=0 \\ x+1-3\sqrt{x+1}-4=0 \\ \sin^2 x-3\sin x-4=0 \end{array}\right\}$$

Ezek az egyenletek mind az $a^2 - 3a - 4 = 0$ másodfokú egyenletre vezethetők vissza.

VIII. Alkalmazások:

- egyenes, kör, parabola adott abszcisszájú vagy ordinátájú pontjának meghatározása
- magasabb fokú egyenletek megoldása
- Pitagorasz-tétel
- koszinusztételből oldal kiszámítása
- mély szakadék mélységének meghatározása: egy ledobott kő dobásától a szakadék alján történő koppanás hangjának meghallásáig eltelt idő mérésével.

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Az ókori Mezopotámiából Kr.e. 2000-ből származó **ékírásos táblák**on található jelek alapján tudjuk, hogy az akkori írástudók már meg tudtak oldani első és másodfokú egyenleteket és egyenletrendszereket.
- A legrégebbi írásos emléken, a **Rhind-papíruszon** (~Kr.e. 1750) láthatjuk a nyomait a gyakorlatból eredő algebrai ismereteknek: 85, a hétköznapi élettel összefüggő számolási és geometriai feladatot tartalmaz. Ezek között megtalálhatóak az egyszerű elsőfokú egyismeretlenes egyenletek megoldási módszerei.
- Időszámításuk kezdete körül keletkezett Kínában a **Matematika kilenc fejezetben** című mű. Ennek utolsó fejezetében már megtalálható a másodfokú egyenlet megoldásának szabálya, amely azonos a ma használt megoldóképlettel.
- **Euklidesz** Kr.e. 300 körül élt görög matematikus Elemek című művében geometrikus tárgyalásban vizsgálta a másodfokú egyenlet megoldásait, szakaszok arányával szerkesztette meg az ismeretlen szakaszt.
- **Viète** (1540–1603) francia matematikus használt először betűket az együtthatók jelölésére, ő írta fel először a gyökök és együtthatók közti összefüggéseket.
- **Cardano** (1501–1576) olasz matematikus megalkotta a harmadfokú egyenlet megoldóképletét, a negyedfokú egyenlet megoldását visszavezette harmadfokú egyenlet megoldására.
- **Abel** (1802–1829) norvég matematikus bebizonyította, hogy az általános ötödfokú-, vagy magasabbfokú egyenletekre nem létezik univerzális megoldóképlet (róla nevezték el a matematikai Nobel-díjnak megfelelő Abel-díjat).
- **Galois** (1811–1832) francia matematikus megmutatta, melyek azok az egyenlettípusok, amelyek a 4 alapművelettel és gyökvonással megoldhatók.

8. A leíró statisztika jellemzői, diagramok. Nevezetes közepek.

Vázlat:

I. Adatsokaságok jellemzői (diagram, táblázat, osztályokba sorolás)
II. A leíró statisztika jellemzői: táblázat, osztályba sorolás, mintavétel, gyakoriság, relatív gyakoriság
III. Diagramok: kör-, oszlop-, vonaldiagram, gyakorisági diagram
IV. Adatok jellemzése: középértékek (módusz, medián, átlag), terjedelem, szórás
V. Nevezetes közepek (számtani, mértani, harmonikus, négyzetes)
Közepek közti összefüggések
VI. Nevezetes közepek alkalmazása szélsőérték-feladatokban
- összeg állandósága esetén szorzat maximalizálása
- szorzat állandósága esetén összeg minimalizálása

VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Adatsokaságok jellemzői

DEFINÍCIÓ: A statisztika feladatai közé tartozik, hogy bizonyos egyedek meghatározott tulajdonságairól tájékozódjék, majd a szerzett (általában számszerű) adatokat feldolgozza, elemzi. Az elemzéshez összegyűjtött adatok halmazát adatsokaságnak, mintának, a meghatározott tulajdonságot ismérvnek, változónak nevezzük. A sokaság elemeinek az ismérv szerinti tulajdonságát statisztikai adatnak, az adatsokaság elemeinek számát a sokaság méretének nevezzük.

II. A leíró statisztika jellemzői

A leíró statisztika a tömegesen előforduló jelenségekkel, a jelenségekből nyert adatok vizsgálatával, elemzésével (leírásával) foglalkozik.
A statisztika egyik fontos feladata az adatok összegyűjtése. Ha a vizsgálandó egyedek száma nagyon nagy, akkor nem minden egyedet vizsgálunk meg a tulajdonság alapján, hanem az adatsokaságnak vesszük egy részhalmazát, vagyis az egyedek közül **mintát veszünk**. A megfelelően kiválasztott minta elemzéséből következtethetünk a sokaság adataira.
A **reprezentatív mintavétel**nél törekedni kell arra, hogy a vizsgált tulajdonság előfordulása a mintában közelítse a sokaságban való előfordulását. Pl. közvélemény-kutatás.
Véletlenszerű mintavételnél a sokaság elemei egyenlő valószínűséggel kerülnek a mintába. Pl. urnából húzás.

DEFINÍCIÓ: Az egyes adatok előfordulásának a száma a **gyakoriság.** Az adatok összehasonlíthatósága miatt sokszor a gyakoriságnak a teljes adatsokasághoz viszonyított arányával, a **relatív gyakorisággal** dolgozunk, azaz a gyakoriságot osztjuk az adatok számával.

Az adatokat megadhatjuk **táblázat**os formában, így az adatok áttekinthetően láthatók. Táblázat használatának előnye, hogy nagyobb adathalmazokat tömören, helytakarékosan ábrázolhatunk.
Leggyakrabban a gyakorisági táblázatot használjuk, ez a lehetséges adatokat és a hozzájuk tartozó gyakoriságokat tartalmazza.
Osztályokba soroljuk az adatokat, ha nagy méretű (sok adatból álló) adatsokasággal dolgozunk, vagy ha sok különböző érték van közel azonos gyakorisággal a sokaságban, akkor az egymáshoz közeli értékek összevonásával az adatokat osztályokba rendezzük. Az osztályba sorolásnál fontos szempont, hogy az osztályoknak diszjunktaknak (különállóknak), de hézagmentesnek kell lennie.

III. Diagramok

Az adatok grafikus megjelenítése diagramon történik, amelynek típusát a feladat határozza meg.

Oszlopdiagram: az adatok egymáshoz való viszonyát ábrázolja. Nem célszerű használni, ha az adatok közt van 1-2 kiugró érték (túl nagy: nem fér rá a diagramra, túl kicsi: eltörpül a többi oszlop közt), vagy ha az adatok közötti eltérés nagyon kicsi (közel azonosnak látszanak az értékek). A vízszintes tengelyen az adatfajtáknak megfelelő intervallumokat jelöljük, ezek fölé olyan téglalapokat rajzolunk, amelyeknek területe arányos az adatfajta gyakoriságával.

Hisztogram (gyakorisági diagram): az adatok gyakorisági eloszlását oszlopdiagramon ábrázolja úgy, hogy az oszlopok hézagmentesen helyezkednek el.

Sávdiagram: fordított oszlopdiagram, amelyben a két tengely helyet cserél, az oszlopok vízszintesek, azaz sávok.

Kördiagram: a részadatoknak az egészhez való viszonyát ábrázolja. Alkalmas %-os formában megadott adatok ábrázolására. A teljes szög (360º) 100%-nak felel meg, a megfelelő százalékérték egyenesen arányos a körcikk középponti szögével. Nem célszerű használni, ha nagyon sok az adat (túl kicsik a középponti szögek, nem összehasonlíthatók)

Vonaldiagram: koordinátarendszerben pontként ábrázolja az összetartozó számpárokat, és ezeket töröttvonallal köti össze. Különböző adatok (pl. időbeli) változását ábrázolja. A gyakoriságok vonaldiagramját gyakorisági poligonnak nevezzük.

IV. Statisztikai mutatók

A középértékek

Az adatsokaság egészét csak leegyszerűsítéseket alkalmazva tudjuk jellemezni. Ezt a célt szolgálják a **középértékek**, amelyek egyetlen számmal írnak le egy adathalmazt.
Ezek előnye, hogy megfelelően alkalmazva jól jelenítik meg az egész adatsokaság valamilyen tulajdonságát, ugyanakkor hátrányuk, hogy nem nyújtanak képet az egyes adatokról.

DEFINÍCIÓ: Egy adatsokaságban a leggyakrabban előforduló adat a minta **módusz**a.
Ha a legnagyobb gyakoriság csak egyszer fordul elő az adatsokaságban, akkor az egymóduszú, ha többször is előfordul, akkor többmóduszú, tehát a módusz több elem is lehet, ha ugyanakkora a gyakoriságuk.
A módusz előnye, hogy könnyen meghatározható, hátránya, hogy csak akkor ad használható jellemzést a mintáról, ha a többi adathoz képest sokszor fordul elő.

DEFINÍCIÓ: Az adatok összegének és az adatok számának hányadosa a minta **átlag**a (**számtani közepe**).
Ha egyes adatok többször is előfordulnak, akkor az összegben szorozni kell őket a gyakoriságukkal és az összeget a gyakoriságok összegével osztjuk. Ez a **súlyozott számtani közép**.
Az átlag fontos tulajdonsága, hogy a nála nagyobb adatoktól vett eltéréseinek összege egyenlő a nála kisebb adatoktól vett eltéréseinek összegével.
Hátránya, hogy egyetlen, a többitől jelentősen eltérő adat eltorzíthatja, így ekkor már nem jól jellemzi a mintát.

DEFINÍCIÓ: Páratlan számú adat **medián**ja a nagyság szerinti sorrendjükben a középső adat, páros számú adat mediánja pedig a két középső adat átlaga.
A definícióból adódik, hogy az összes előforduló ismérvérték fele kisebb vagy egyenlő, fele nagyobb vagy egyenlő, mint a medián.
Fontos tulajdonsága, hogy az adatoktól mért távolságainak összege minimális.
A medián előnye, hogy valóban középérték, hiszen ugyanannyi adat nagyobb nála, mint ahány kisebb.

A szóródás jellemzői

DEFINÍCIÓ: Az adatok legnagyobb és legkisebb elemének a különbségét a **minta terjedelmé**nek nevezzük.
Minél kisebb a minta terjedelme, annál jobban jellemzi a mintát.

DEFINÍCIÓ: Az adatok átlagtól való eltérések négyzetének átlaga a **minta szórásnégyzete**, ennek négyzetgyöke a **minta szórása**: $S=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}$.
A szórás megmutatja, hogy a minta adatai mennyire térnek el az átlagtól. Minél kisebb a szórás, annál jobban jellemzi az átlag az adatsokaságot.

V. Pozitív számok nevezetes közepei

DEFINÍCIÓ: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ nemnegatív számok

számtani (aritmetikai) közepe:

$$A=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$$

mértani (geometriai) közepe:

$$G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}$$

négyzetes (kvadratikus) közepe:

$$Q=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

harmonikus közepe:

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}, \text{ ha } a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n>0.$$

TÉTEL: Közepek közti összefüggés: $H\le G\le A\le Q$.
Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n$.

TÉTEL: Két nemnegatív valós szám esetén $\sqrt{a\cdot b}\le\dfrac{a+b}{2}$.

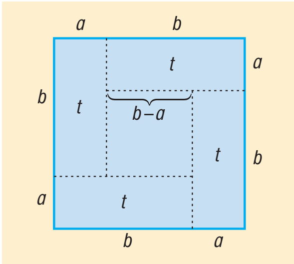
BIZONYÍTÁS I.: Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért a négyzetre emelés az eredetivel ekvivalens állítást fogalmaz meg. Tehát

$$\begin{aligned} ab&\le\frac{a^2+2ab+b^2}{4} && /\cdot 4\\ 4ab&\le a^2+2ab+b^2 && /-4ab\\ 0&\le a^2-2ab+b^2 && /\text{nevezetes szorzattá alakítjuk}\\ 0&\le(a-b)^2 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség igaz, így az eredeti is az.
Az eredmény alapján megállapítható, hogy a két közép akkor és csak akkor lesz egymással egyenlő, ha $a=b$. Ekkor $a=\sqrt{ab}=\dfrac{a+b}{2}=b$. □

BIZONYÍTÁS II.: Legyen $0 < a \le b$.

Vegyünk fel egy $a + b$ oldalú négyzetet, és az oldalait osszuk fel az ábrán látható módon!



A nagy négyzet területe egyenlő a keletkező részek területének összegével:

$$(a+b)^2 = 4t + (b-a)^2$$

A kis téglalap területe: $t = ab$.

Mivel $(b-a)^2 \ge 0$, ezért ezt a tagot elhagyva az $(a+b)^2 \ge 4t$ egyenlőtlenséghez jutunk.

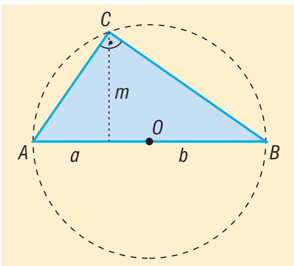
Behelyettesítve t helyére: $(a+b)^2 \ge 4ab$.

Mivel a feltétel miatt mindkét oldal pozitív, ezért gyököt vonhatunk: $a+b \ge 2\sqrt{ab}$.

Amiből $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$. □

BIZONYÍTÁS III.: Legyen $a, b > 0$, $2r = a + b$.

Vegyünk fel egy r sugarú kört, benne egy AB átmérőt, a körvonalon egy A, B-től különböző C pontot.



A Thalész-tétel miatt $ACB\sphericalangle = 90°$.

ABC háromszögre alkalmazva a magasságtételt: $m = \sqrt{ab}$.

De a körben $m \le r$, azaz $\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}$. □

VI. Nevezetes közepek alkalmazása szélsőérték-feladatokban

1. Összeg állandósága esetén a szorzatot tudjuk maximalizálni.

Pl.: Azon téglatestek közül, amelyek éleinek összege 60 cm, melyiknek a térfogata maximális?
Legyenek a téglatest élei: a, b és c.
Ekkor a téglatest térfogata $V = abc$, az élek összege: $4(a+b+c) = 60$.
Ebből $a + b + c = 15$.
A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget kihasználva:

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc} \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge abc \Rightarrow \left(\frac{15}{3}\right)^3 \ge abc \Rightarrow 5^3 \ge abc \Rightarrow 125 \ge V.$$

Mivel egyenlőség csak $a = b = c$ esetén teljesül, így a térfogat az 5 cm élű kocka esetén maximális.

2. Szorzat állandósága esetén az összeget tudjuk minimalizálni.

Pl.: Azon téglalapok közül, amelyeknek a területe 100 cm^2, melyiknek a kerülete a minimális? Legyenek a téglalap oldalai a és b.

Ekkor a téglalap területe $t = ab = 100$, kerülete $k = 2(a + b)$, amiből $\frac{k}{4} = \frac{a+b}{2}$.

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget kihasználva:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{k}{4} \geq \sqrt{100} \Rightarrow \frac{k}{4} \geq 10 \Rightarrow k \geq 40.$$

Mivel egyenlőség csak $a = b$ esetén teljesül, így a kerület a 10 cm oldalú négyzet esetén minimális.

Pl.: f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Határozzuk meg az $f(x)$ függvény minimumát!

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget kihasználva:

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{1} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 2.$$

Ekkor az f minimumának értéke $f(x)$=2, minimum helye: $x = \frac{1}{x} = 1$.

VII. Alkalmazások:

- Statisztika:
  - közvélemény-kutatások,
  - szavazások,
  - gazdasági mutatók,
  - osztályátlagok, hiányzási statisztikák,
  - felvételi átlagpontok.
- Nevezetes közepek:
  - számtani közép: statisztikai átlag kiszámítása,
  - mértani közép: átlagos növekedési ütem kiszámítása, magasságtétel, befogótétel,
  - négyzetes közép: statisztikai szórás kiszámítása,
  - harmonikus közép: átlagsebesség meghatározása.

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A különféle középértékeket görög **Pitagorasz** és tanítványai vezették be a Kr.e. VI-V. században. Ők foglalkoztak az $a : b = b : c$ aránypár vizsgálatával. Így jutottak el a „mértani középarányos” fogalmához. Valószínűleg az 1 és a 2 mértani közepének keresésekor találták meg az első irracionális számot, a $\sqrt{2}$ -t.
- A statisztika eredetileg „államszámtan” volt. A statisztika kifejezés a latin status (állam, állapot) és az olasz statista (köztisztviselő, politikus) szavakból származtatható. A statisztika már az ókortól kezdve arról tájékoztatta az államok vezetőit, hogy mekkora adókat vethetnek ki az alattvalóikra, azokból mennyi bevételük van, mekkora katonasággal számolhatnak egy eljövendő háborúban. **Kínában** már 4000 évvel ezelőtt összeírták a lakosságot, az ingatlanokat, az ingóságokat. **Angliában** már a XI. században összeírták a földbirtokokat, amely az adózás és a hadsereg céljait szolgálta.
- **Magyarországon** a középkorban a dézsmajegyzékek (kilenced, tized), majd az újkorban az urbáriumok 1530-tól (tartalmazta a jobbágyok állatállományát, eszközeit, szerszámait, telkének nagyságát és milyenségét is), jobbágyösszeírások 1700-as években, népszámlálások 1800-as évektől jelentették a statisztika alapjait.

- A statisztika a polgári forradalmak után vált igazi tudománnyá. A kapitalizmusban a államok vezetőin kívül a tőkéseket is érdekelni kezdték a statisztikai felmérések, egyre komolyabb eszközöket használtak fel adataik feldolgozására hasznuk növelése érdekében.
- A XVII. század óta a matematikai statisztika a matematika önálló ágává fejlődött, amelynek fő célja minél megbízhatóbb hasznosítható információt nyerni a felmérési, megfigyelési, mérési adatokból.
- Az 1890-es Egyesült Államokbeli népszámlálásra **Hollerith** feltalálta azt a gépet, amely a statisztikai adatokat lyukkártyák elektromos leolvasásával és rendszerezésével dolgozta fel. A gép gyártására Hollerith céget alapított, amelyből később az IBM jött létre.

9. Számsorozatok és tulajdonságaik (korlátosság, monotonitás, konvergencia). Műveletek konvergens sorozatokkal. A számtani sorozat, az első *n* tag összege.

Vázlat:

I. Számsorozat definíciója, megadási módjai
II. Tulajdonságai: monotonitás, korlátosság, konvergencia; kapcsolatuk
III. Műveletek konvergens sorozatokkal
IV. Számtani sorozat
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Számsorozat

DEFINÍCIÓ: A **számsorozat** olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete pedig valamilyen számhalmaz.
Az a_1, a_2, …, a_n tagokból álló sorozatot $\{a_n\}$-nel vagy (a_n)-nel jelöljük. A sorozat n-edik tagja: a_n.

Sorozatok megadása történhet:

- Függvényszerűen: f: $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, tagjai 1, 4, 9, 16, …
- Az n-edik általános tagot előállító formulával: $a_n = 3 \cdot 2^n$.
- Az elemeit egyértelműen meghatározó utasítással: $\{a_n\} = \{2^n$ utolsó számjegye$\}$.
- A sorozat tagjaival: 3, 6, 9, 12, 15, 18, …
- Rekurzív módon: megadjuk a sorozat első néhány tagját, valamint a képzési szabályt, amellyel a sorozat következő tagjai a megelőzőkből megkaphatók.
  Pl.: *Fibonacci sorozat:* $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, ha $n \geq 3$. A tagok: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21… .

II. Sorozatok tulajdonságai:

DEFINÍCIÓ: Az $\{a_n\}$ sorozat **szigorúan monoton** növő, ha minden pozitív egész n-re teljesül: $a_n < a_{n+1}$.

DEFINÍCIÓ: Az $\{a_n\}$ sorozat **szigorúan monoton** csökkenő, ha minden pozitív egész n-re teljesül: $a_n > a_{n+1}$.

Ha nem a szigorú monotonitást, csak a monotonitást kérjük, akkor megengedett az egyenlőség is.

Ha egy sorozat monotonitását keressük, akkor általában nem az $a_n \lesseqgtr a_{n+1}$ kapcsolatot vizsgáljuk, hanem vagy $a_{n+1} - a_n \lesseqgtr 0$, vagy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \lesseqgtr 1$. Ha a sorozat szigorúan monoton növő, akkor

$a_{n+1} - a_n > 0$, illetve $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, ha a sorozat szigorúan monoton csökkenő, akkor $a_{n+1} - a_n < 0$, illetve $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Ha bármelyik esetben a reláció mellett az egyenlőség is teljesül, akkor a sorozat csak monoton. Többnyire a feladat típusa dönti el, hogy melyik módszerrel vizsgáljuk a sorozat monotonitását. Magasabb kitevőjű vagy faktoriálist tartalmazó összefüggések esetén célszerű a hányadossal való vizsgálat, gyakrabban használjuk a különbséggel való számolást.

DEFINÍCIÓ: Egy $\{a_n\}$ sorozatnak K felső korlátja, ha $a_n \le K$ minden pozitív egész n-re teljesül. Ilyenkor a sorozatot **felülről korlátos**nak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Egy $\{a_n\}$ sorozatnak k alsó korlátja, ha $a_n \ge k$ minden pozitív egész n-re teljesül. Ilyenkor a sorozatot **alulról korlátos**nak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Egy sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

DEFINÍCIÓ: A felülről korlátos sorozat legkisebb felső korlátját a sorozat **felső határ**ának, alulról korlátos sorozat legnagyobb alsó korlátját a sorozat **alsó határ**ának nevezzük.

TÉTEL: Felülről korlátos sorozatnak van felső határa, alulról korlátos sorozatnak van alsó határa.

TÉTEL: Végtelen sok egymásba skatulyázott, zárt intervallumnak van közös pontja. Ha az intervallumok hossza minden pozitív számnál kisebbé válik, akkor pontosan egy közös pont van.

DEFINÍCIÓ: Az $\{a_n\}$ sorozat **konvergens** és **határértéke** az A szám, ha minden pozitív ε számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy a sorozat a_N utáni tagjai mind az A szám ε sugarú környezetébe esnek, vagyis minden pozitív ε számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. Jelölése: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$, vagy $a_n \to A$.

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy bármilyen kis pozitív ε-ra a sorozatnak csak véges sok tagja esik az $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ intervallumon kívülre.

DEFINÍCIÓ: Az olyan sorozatokat, amelyeknek nincs határértéke, **divergens** sorozatoknak nevezzük.

TÉTEL: A konvergens sorozatok tulajdonságai:
- Konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.
- Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.
- Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens. A sorozat határértéke monoton növekedés esetében a sorozat felső, monoton csökkenés esetében a sorozat alsó határa.
- Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra $a_n \le b_n \le c_n$ és $a_n \to A$, $c_n \to A$, akkor $b_n \to A$. Ez a rendőr-elv.

III. Műveletek konvergens sorozatokkal:

- Ha $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ konvergens és $a_n \to A$, $b_n \to B$, akkor
  - $a_n \pm b_n \to A \pm B$
  - $a_n \cdot b_n \to A \cdot B$
  - $c \cdot a_n \to c \cdot A$, ahol $c \in \mathbb{R}$
  - $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$, ahol $b_n \ne 0$, $B \ne 0$

IV. Számtani sorozat

DEFINÍCIÓ: Azt a számsorozatot, amelyben a második tagtól kezdve bármely tag és a közvetlenül előtte álló tag különbsége állandó, **számtani sorozat**nak nevezzük. Ez a különbség a **differencia**, jele d.

Ha egy számtani sorozatnál
- $d > 0$, akkor a sorozat szigorúan monoton növő, és alulról korlátos.
- $d = 0$, akkor a sorozat konstans.
- $d < 0$, akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő, és felülről korlátos.

TÉTEL: Ha egy **számtani sorozat** első tagja a_1, differenciája d, akkor ***n*-edik tagja** $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

BIZONYÍTÁS: teljes indukcióval.

Definíció szerint $a_2 - a_1 = d \Leftrightarrow a_2 = a_1 + d$.

Tegyük fel, hogy a k-adik elemre igaz az állítás, azaz $a_k = a_1 + (k - 1)d$.

Bizonyítani kell, hogy a $(k + 1)$-edik elemre öröklődik, azaz $a_{k+1} = a_1 + ((k + 1) - 1)d = a_1 + kd$.

A definíció szerint $a_{k+1} - a_k = d \Leftrightarrow a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k - 1)d + d = a_1 + kd$. Így bebizonyítottuk az öröklődést, tehát igaz az állítás.□

TÉTEL: A **számtani sorozat első *n* tagjának összege** (S_n) az első és az n-edik tag számtani közepének n-szeresével egyenlő: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

BIZONYÍTÁS: az összeget felírjuk az 1., aztán az n-edik tagtól kiindulva:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$

$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n - 3)d) + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d)$

$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n - 3)d) + (a_n - (n - 2)d) + (a_n - (n - 1)d)$

Összeadva: $2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{n}$.

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Ezzel a tételt bizonyítottuk.□

TÉTEL: S_n másik alakja: $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

TÉTEL: Tetszőleges elem a tőle szimmetrikusan elhelyezkedőknek a számtani közepe: $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$.

Számtani sorozat konvergenciája: Csak $d = 0$ esetén konvergens a számtani sorozat.

V. Alkalmazások:

- A Fibonacci-sorozat elemeivel sok helyen találkozhatunk a természetben. Például a fenyőtoboz, az ananász pikkelyei, a napraforgó magjai Fibonacci spirálban helyezkednek el.
- Speciális sorozatok határértéke:
  - $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

– $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, ami a természetes alapú logaritmus alapszáma (Euler típusú sorozat).

– Következmény: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$.

– $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |q|<1 \\ \infty, & \text{ha } q>1 \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q\le -1 \\ 1, & \text{ha } q=1 \end{cases}$. Ez a mértani sorozat.

- Analízis: függvény határértékénél, folytonosságánál.
- Irracionális kitevőjű hatvány fogalma sorozat határértékével.

Matematikatörténeti vonatkozások:

- **Babilóniában** a Kr.e. VI.–III. században már ismerték a számtani haladvány összegképletének megfelelő eljárást. Utasítást adtak az első n négyzetszám összegének a kiszámítására (24. tétel).
- A **pitagoreusok** (Pitagorasz tanítványai) Kr.e. 5–600 körül tudták a számtani sorozat tagjait összegezni, ismerték az első n páratlan szám összegét (24. tétel).
- A számtani sorozat összegképletére a hinduk az V.–XII., a kínaiak pedig a VI. –IX. században jöttek rá.
- **Euler** (1717–1783) német matematikus vezette be a róla elnevezett sorozat határértékét e-nek.
- **Cauchy** (1789–1837) francia matematikus fektette szilárd alapokra a matematika alapvető fogalmait (mint például konvergencia, sorozat, határérték), ő definiálta ezeket a matematikában megkövetelt szabatossággal.

10. Mértani sorozat, az első *n* tag összege, végtelen mértani sor. Kamatszámítás, gyűjtőjáradék, törlesztőrészlet. Exponenciális folyamatok a társadalomban és a természetben.

Vázlat:

I. Mértani sorozat, a sorozat általános tagja, az első *n* tag összege
II. Végtelen mértani sor
III. Kamatszámítás
IV. Gyűjtőjáradék
V. Törlesztőjáradék
VI. Exponenciális folyamatok a társadalomban és a természetben
VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Mértani sorozat, a sorozat általános tagja, az első *n* tag összege

DEFINÍCIÓ: A **számsorozat** olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete pedig valamilyen számhalmaz.
Az a_1, a_2, …, a_n tagokból álló sorozatot $\{a_n\}$-nel vagy (a_n)-nel jelöljük. A sorozat n-edik tagja: a_n.

DEFINÍCIÓ: Azt a számsorozatot, amelyben a második tagtól kezdve bármely tag és a közvetlenül előtte álló tag hányadosa állandó, **mértani sorozat**nak nevezzük. Ez a hányados a **kvóciens**, jele q.
A definíció kizárja, hogy a sorozat bármely eleme 0 legyen, továbbá a hányados sem lehet 0.

TÉTEL: Ha egy **mértani sorozat** első tagja a_1, hányadosa q, akkor ***n*-edik tagja** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

BIZONYÍTÁS: teljes indukcióval a számtani sorozat n-edik tagjához hasonlóan.

TÉTEL: A mértani sorozat első n tagjának összege:

- ha $q = 1$, akkor $S_n = n \cdot a_1$
- ha $q \neq 1$, akkor $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

BIZONYÍTÁS:

- ha $q = 1$, akkor a sorozat minden tagja a_1, így $S_n = \overbrace{a_1 + a_1 + \ldots + a_1}^{n} = n \cdot a_1$.
- ha $q \neq 1$, akkor az összeget írjuk fel a_1-gyel, és q-val:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt q-val:

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n.$$

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból:

$$S_n q - S_n = a_1 q^n - a_1.$$

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1).$$

Osszuk mindkét oldalt $(q-1) \neq 0$-val:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1},$$

így állításunkat beláttuk.□

TÉTEL: Bármely elem négyzete egyenlő a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok szorzatával: $a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$.

TÉTEL: Pozitív tagú sorozatnál bármely elem a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő elemek mértani közepe: $a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$.

Mértani sorozat konvergenciája:
- $a_n \to a_1$, ha $q = 1$.
- $a_n \to 0$, ha $|q| < 1$.
- $\{a_n\}$ divergens, ha $q = -1$, vagy $|q| > 1$.

II. Végtelen mértani sor

DEFINÍCIÓ: Legyen adott egy $\{a_n\}$ számsorozat. Az $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + ...$ végtelen sok tagú összeget **végtelen sor**nak (vagy röviden sornak) nevezzük.

Jelölés: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + ... = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

DEFINÍCIÓ: Ha az $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + ...$ végtelen sorban az $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, ...$ tagok egy mértani sorozat tagjai, akkor a sort **mértani sor**nak nevezzük.

Felmerül a kérdés, hogy mit értsünk végtelen sok szám összegén, hiszen a véges sok szám esetén megszokott módszerek nem alkalmazhatók.

DEFINÍCIÓ: A **sor összegé**n az

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1 \\ &S_2 = a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ &S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \end{aligned}$$

úgynevezett részletösszegek sorozatának határértékét értjük, amennyiben ez a határérték létezik. Tehát a sor összegét egy olyan sorozat határértékével definiáljuk, amely sorozat első tagja a_1, n-edik tagja az eredeti sorozat első n tagjának összege.

TÉTEL: Ha egy mértani sorban $|q| < 1$, akkor a mértani sor konvergens, és összege $S = \frac{a_1}{1-q}$, ha $|q| \geq 1$, akkor nem konvergens.

III. Kamatszámítás

Pénzügyi folyamatokban **kamat** a kölcsönadott, illetve a letétbe helyezett pénzösszeg, vagyis a **tőke** használatáért járó díja egy adott időszakra. A kamat nagyságát a tőke százalékában fejezzük ki, ez a kamatláb ($p\%$). De számolhatunk kamattényezővel (q) is, ami a kamatláb 100-ad részével tér el az 1-től: értéknövekedés esetén $q = 1 + \frac{p}{100}$, értékcsökkenés esetén $q = 1 - \frac{p}{100}$.

Kamatos kamatról akkor beszélünk, ha a kamatozási időszak végén a kamatot hozzáadják a tőkéhez, és utána ez a megnövekedett érték kamatozik.
A kamatos kamat számítása a mértani sorozat alkalmazásának olyan speciális esete, amikor a sorozatnak van nulladik tagja, amit a pénzügyi számításokban a-val (annuitás rövidítése) jelölünk.

Kamatoskamat-számítás: ha egy a összeg $p\%$-kal kamatozik évente, akkor az n-edik év végére az összeg $a_n = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$. Ha $q = 1 + \frac{p}{100}$ kamattényező, akkor $a_n = a \cdot q^n$. Ez olyan mértani sorozat n-edik eleme, amelynek első eleme aq, hányadosa q.
Az a_n összefüggésében négy mennyiség szerepel, közülük bármely hármat ismerve a negyedik kiszámolható.
A kamatozás üteme nem csak éves, hanem havi, napi, stb. Ekkor figyelni kell arra, hogy a kamattényező és az időszak hossza azonos nagyságú időszakra vonatkozzon.

Ha az éves kamatláb $p\%$, az éves kamattényező q, akkor a havi kamattényező $\sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} = \sqrt[12]{q}$, hasonlóan a napi kamattényező $\sqrt[365]{1 + \frac{p}{100}} = \sqrt[365]{q}$.

IV. Gyűjtőjáradék

Gyűjtőjáradékról akkor beszélünk, ha egy alapösszeget egyenlő időközönként ugyanakkora összszeggel növelünk, vagyis egyenlő időközönként azonos összeget elhelyezünk a bankban ugyanazon a számlán, vagyis gyűjtjük a pénzt, minden betett összegünk kamatos kamattal kamatozik.

Gyűjtőjáradék számítása: minden év elején egy a összeget teszünk a bankba, és ez $p\%$-kal kamatozik évente úgy, hogy a következő év elején a megnövekedett összeghez tesszük hozzá az újabbat. Ha $q = 1 + \frac{p}{100}$ kamattényező, akkor az n-edik év végén a rendelkezésre álló összeg egy olyan mértani sorozat első n elemének összege, ahol $a_1 = aq$. Ekkor az n-edik év végére $S_n = aq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ összeget gyűjtünk.

V. Törlesztőrészlet

Törlesztőrészletről akkor beszélünk, ha egy hitelt egyenlő időközönként ugyanakkora összeggel fizetünk vissza, azaz egyenlő időközönként azonos összeggel csökkentjük a tartozásunkat, vagyis törlesztjük a hitelt, minden befizetett összeg után csak a fennálló tartozásra fizetünk kamatos kamatot.
Törlesztőrészlet számítása: felveszünk n évre S_n nagyságú hitelt évi $p\%$-os kamatra, és minden évben a összeget törlesztünk. Az n-edik év végére a befizetéseknek kamatokkal megnövelt értékének egyenlő kell lennie a kölcsön n év alatt $p\%$-os kamatozással megnőtt értékével. Ha $q = 1 + \frac{p}{100}$ a kamattényező, akkor a hitelre fennálló összefüggés: $S_n \cdot q^n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

VI. Exponenciális folyamatok a társadalomban és a természetben

A társadalomban és a természetben lejátszódó exponenciális folyamatok fő típusai az időben, illetve a térben lejátszódó, valamint az exponenciálisan növekedő, illetve csökkenő folyamatok.

Az időben lezajló exponenciálisnövekedést a $N_t = N_0 \cdot e^{\lambda t}$, a csökkenést a $N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ képlet írja le, ahol N_0 a kezdeti mennyiség és N_t a t időpontbeli mennyiség. Az exponenciális folyamatra jellemző a λ paraméter, amit rendszerint pozitívnak választanak csökkenés esetén is.

Az exponenciálisan növekedő mennyiségek minél nagyobbak, annál gyorsabban növekszenek. A növekedés mértéke arányos a mennyiség nagyságával. Az exponenciálisan növekvő mennyiségek változását exponenciális függvény írja le.

Az exponenciális változás lehet folytonos (pl. populáció növekedése), illetve diszkrét (pl. kamatos kamat).

Az egyik legjellemzőbb probléma a Föld túlnépesedése. Egy matematikai modell szerint a népesség 1837 óta (akkor a lakosság kb 1 milliárd volt) az előző évinek 1,1%-ával növekedett. Ez azt jelenti, hogy1837 óta a Föld lakosságát leíró képlet: $N_t = 1 \cdot 1{,}011^t$. A modell szerint Föld lakossága kb 63 évente megduplázódik ($1{,}011^{63} \approx 2$). Mai ismereteink szerint a 2026-ra adott 8 milliárd lakos becslés közel áll a valósághoz. Az exponenciális népességnövekedés ezek szerint azt is jelenti, hogy ugyanannyi időközönként egyre nagyobb számmal növekszik a népesség. A rendelkezésre álló erőforrások – például energia, nyersanyag, élelem – azonban nem tudnak lépést tartani ezzel a növekedéssel. Így vagy az életfeltételek romlanak drámaian, vagy a népesség növekedési ütemének kell drasztikusan csökkennie.

A természetben a populációk növekedési folyamata kezdetben exponenciális függvénnyel írható le (ideális körülmények között: táplálékbőség, ragadozók hiánya). Előbb-utóbb azonban eljön a telítődés ideje, amikor is a növekedés különböző okok miatt erősen lelassul; a természetben ilyen okok a terület eltartóképessége és a fajtársak vetélkedése.

A diszkrét exponenciális növekedés leggyakoribb felhasználási területe a kamatos kamat számítása, ekkor a kamatot évente egyszer és nem a kamat keletkezésének időpontjában tőkésítik, vagyis veszik hozzá a tőkéhez.

A diszkrét exponenciális csökkenés elsősorban a tárgyak (pl. autó, számítógép) értékcsökkenésének számolása, ekkor a csökkenés mértéke az előző időszak százalékában adott. Évi p%-os értékcsökkenés esetén n év múlva a tárgy értéke: $a_n = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$. Pl. ha évente 11%-kal csökken a tárgy értéke, akkor kb 6 év alatt a tárgy értéke a felére csökken, a 6 év ebben az esetben a tárgy értékének felezési ideje.

Térben exponenciális folyamat pl az egyes sugárzások elnyelődése homogén közegben. Ezek hasonló képletekkel írhatók fel, mint az időben exponenciális folyamatok, de idő helyett a távolság a változó.

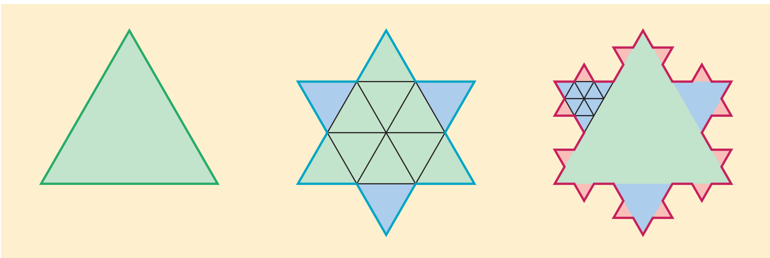
Az exponenciális folyamatok lényege tehát az, hogy egyenlő időközök alatt mindig ugyanannyiszorosára változik a vizsgált mennyiség.

VII. Alkalmazások:

- Végtelen szakaszos tizedestörtek közönséges tört alakra hozásakor a konvergens mértani sor tulajdonságait használjuk.
- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |q|<1 \\ \infty, & \text{ha } q>1 \\ \text{nem létezik,} & \text{ha } q\le -1 \\ 1, & \text{ha } q=1 \end{cases}$. Ez a mértani sorozat.
- Az $N = N_0 \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}$ bomlási törvényben, ahol N a még el nem bontott részecskék száma, N_0 a kezdeti részecskeszám, λ az anyagra jellemző bomlási állandó. A felezési idő alatt a radioaktív atomok száma a kezdeti érték felére csökken, akármelyik pillanat az idő mérésének kezdete.
- Exponenciális függvénnyel írható le, azaz mértani sorozat szerint változó folyamatok pl a radioaktív izotópok bomlási egyenletei, vagy az oldódás folyamata, a kondenzátor feltöltődésének és kisülésének folyamata, baktériumok számának változása.

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A legrégebbi írásos emléken, a **Rhind-papíruszon** (~Kr.e. 1750) található egy mértani sorozatos feladat: 7 ház mindegyikében 7 macska él, mindegyik macska 7 egeret őriz. Hány egér volt összesen? Valószínűleg az egyiptomiak ismerték a mértani sorozat összegképletének kiszámítási módját (nem magát a képletet, hanem a módszert).
- A mértani sorozat összegképletét az 1300-as években **Beldomandi** olasz matematikus találta ki.
- **Koch** (1870–1924) svéd matematikus megalkotta a **Koch-görbét**: egy szabályos háromszög oldalait harmadoljuk, a középső harmad fölé írjunk kifele egy újabb szabályos háromszöget, majd ezen a háromszögön hajtsuk végre az oldal harmadolását, a középső harmad fölé írjunk kifele egy újabb szabályos háromszöget, majd ezt az eljárást folytassuk a végtelenségig. Mekkora a kialakult alakzat kerülete, területe? Megoldás végtelen mértani sorral.



11. Függvények lokális és globális tulajdonságai. A differenciálszámítás és alkalmazásai.

Vázlat:

I. Függvény fogalma, értelmezési tartomány, értékkészlet
II. Függvénytulajdonságok:
Lokális függvénytulajdonságok: zérushely, monotonitás, lokális (helyi) szélsőérték, görbület, inflexió, folytonosság.
Globális függvénytulajdonságok: értelmezési tartomány, értékkészlet, globális (abszolút) szélsőérték, paritás, periodikusság, folytonosság, korlátosság.
III. Differenciálszámítás
IV. A differenciálszámítás alkalmazása:
Függvény érintője
Függvényvizsgálat
V. Szélsőérték-problémák vizsgálata differenciaszámítással
VI. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Függvény fogalma, értelmezési tartomány, értékkészlet

DEFINÍCIÓ: Legyen A és B két nem üres halmaz. Azt mondjuk, hogy megadunk egy A halmazon értelmezett B-beli értéket felvevő **függvény**t, ha A minden eleméhez hozzárendeljük a B egy és csakis egy elemét. Jele: f: $A \to B$.

DEFINÍCIÓ: **Értelmezési tartomány**nak nevezzük az A halmazt. Jele D_f.

DEFINÍCIÓ: **Értékkészlet** a B halmaz azon elemeiből álló halmaz, amelyek a hozzárendelésnél fellépnek (vagyis az $f(x)$ értékek). Jele az R_f.

DEFINÍCIÓ: Ha $c \in D_f$, akkor a c helyen felvett függvényértéket $f(c)$-vel jelöljük, ez a helyettesítési vagy **függvényérték**.

DEFINÍCIÓ: Ha az értelmezési tartomány és az értékkészlet is számhalmaz, akkor a függvényt grafikonon tudjuk szemléltetni. A **grafikon** az $(x; f(x))$ pontok halmaza.

II. Függvénytulajdonságok

Lokális függvénytulajdonságok: zérushely, monotonitás, lokális (helyi) szélsőérték, görbület, inflexió, pontbeli folytonosság.

DEFINÍCIÓ: **zérushely**: Az értelmezési tartomány azon x_0 eleme, ahol a függvény értéke 0. $f(x_0) = 0$.

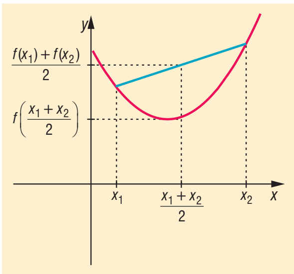
DEFINÍCIÓ: **monotonitás**: Az f függvény az értelmezési tartományának egy intervallumában monoton **nő**, ha az intervallum minden olyan x_1, x_2 helyén, amelyre $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \le f(x_2)$ teljesül.
Az f függvény az értelmezési tartományának egy intervallumában monoton **csökken**, ha az intervallum minden olyan x_1, x_2 helyén, amelyre $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \ge f(x_2)$ teljesül.
Ha az egyenlőtlenségben az egyenlőség nincs megengedve, akkor **szigorú monotonitás**ról beszélünk.

DEFINÍCIÓ: lokális (helyi) szélsőérték: Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen **lokális maximum**a van, ha az x_0-nak van olyan I környezete, amelynek minden $x \in D_f$ pontjában $f(x) \leq f(x_0)$. Az x_0 helyet lokális (helyi) maximumhelynek nevezzük.

Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen **lokális minimum**a van, ha az x_0-nak van olyan I környezete, amelynek minden $x \in D_f$ pontjában $f(x) \geq f(x_0)$. Az x_0 helyet lokális (helyi) minimumhelynek nevezzük.
A monotonitás és a szélsőérték definíciójából következik, hogy ahol a függvény monotonitást vált, ott lokális szélsőértéke van.

DEFINÍCIÓ: görbület: A függvényt egy intervallumban **konvex**nek nevezzük, ha az intervallum bármely két x_1, x_2 pontjára teljesül az $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ egyenlőtlenség.

Ha az egyenlőtlenség fordított irányú, akkor a függvény **konkáv** az adott intervallumon.
Szemléletesen a konvex (illetve konkáv) görbékre jellemző, hogy a görbe bármely két pontját összekötő szakasz a görbe felett (illetve alatt) halad.



DEFINÍCIÓ: inflexió: A függvénygörbének azt a pontját, ahol a görbe konvexből konkávba, vagy konkávból konvexbe megy át, inflexiós pontnak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: pontbeli folytonosság: Az f függvény az értelmezési tartománynak egy x_0 pontjában folytonos, ha létezik az x_0 pontban határértéke és az megegyezik a helyettesítési értékkel, vagyis $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

<u>**Globális függvénytulajdonságok:**</u> értelmezési tartomány, értékkészlet, globális (abszolút) szélsőérték, paritás, periodikusság, intervallumbeli folytonosság, korlátosság.

DEFINÍCIÓ: globális (abszolút) szélsőérték: Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen **globális maximum**a van, ha minden $x \in D_f$ pontjában $f(x) < f(x_0)$. Az x_0 helyet globális maximumhelynek nevezzük.

Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen **globális minimum**a van, ha minden $x \in D_f$ pontjában $f(x) > f(x_0)$. Az x_0 helyet globális minimumhelynek nevezzük.
Tehát a szélsőérték abszolút (globális) szélsőérték x_0-ban, ha az értelmezési tartomány minden pontjára igazak az egyenlőtlenségek.

DEFINÍCIÓ: paritás: Az f függvény **páros**, ha értelmezési tartományának minden x elemére $-x$ is eleme az értelmezési tartománynak, továbbá az értelmezési tartomány minden x elemére $f(x) = f(-x)$.

Az f függvény **páratlan**, ha értelmezési tartományának minden x elemére $-x$ is eleme az értelmezési tartománynak, továbbá az értelmezési tartomány minden x elemére $f(x) = -f(-x)$).
A páros függvénynek a grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre. (pl. x^{2n}, $|x|$, $\cos x$).
A páratlan függvények grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra. (pl. x^{2n+1}, $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\mathrm{tg}\, x$).

DEFINÍCIÓ: periodikusság: Az f függvény **periodikus**, ha létezik olyan $p \neq 0$ valós szám, hogy a függvény értelmezési tartományának minden x elemére $x + p$ is eleme az értelmezési tartománynak, továbbá az értelmezési tartomány minden x elemére $f(x + p) = f(x)$, ahol p a függvény periódusa (pl. trigonometrikus függvények, törtrész függvény).

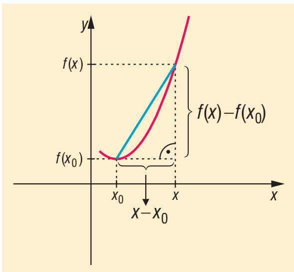
DEFINÍCIÓ: intervallumbeli folytonosság: Az f függvény egy nyílt intervallumban **folytonos**, ha az intervallum minden pontjában folytonos

(pl.: folytonos: x^n, $\log_a x$, a^x, $\sin x$, $\cos x$; nem folytonos: egészrész, $\frac{1}{x}$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$).

DEFINÍCIÓ: korlátosság: Az f függvény **felülről korlátos** az értelmezési tartományának egy intervallumában, ha létezik olyan K szám, hogy az intervallum minden x pontjában $f(x) \leq K$. Egy függvény felső korlátai közül a legkisebbet a függvény **felső határ**ának (szuprémumának) nevezzük.
Az f függvény **alulról korlátos** az értelmezési tartományának egy intervallumában, ha létezik olyan k szám, hogy az intervallum minden x pontjában $f(x) \geq k$. Egy függvény alsó korlátai közül a legnagyobbat a függvény **alsó határ**ának (infimumának) nevezzük.
Korlátos egy függvény, ha alulról és felülről is korlátos.

III. Differenciálszámítás:

DEFINÍCIÓ: Legyen f egy $]a, b[$ intervallumon értelmezett függvény és x_0 az értelmezési tartomány egy pontja. Ekkor a $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvényt az f függvény x_0 ponthoz tartozó különbségi hányados (**differenciahányados**) függvényének nevezzük.



DEFINÍCIÓ: Az f függvény x_0 ponthoz tartozó különbségi hányadosának az x_0 helyen vett határértékét (ha ez a határérték létezik és véges) az f függvény x_0 pontbeli **differenciálhányados**ának vagy deriváltjának nevezzük.

Jel: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

DEFINÍCIÓ: Ha egy függvénynek egy pontban van deriváltja, akkor azt mondjuk, hogy a függvény ebben a pontban **differenciálható** (deriválható).
Az x_0 pontbeli differenciálhányados egy ábrázolható függvény esetében a függvény grafikonjának $(x_0, f(x_0))$ pontjához húzott érintő meredeksége.
Pl.: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 5$.
Differenciahányados $x_0 = 1$ pontban:

$$g(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5) - (1^2 - 4 \cdot 1 + 5)}{x - 1} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \frac{(x-3)(x-1)}{x-1} = x - 3, \text{ ha } x \neq 1.$$

g nincs értelmezve az $x = 1$ helyen, de $\lim\limits_{x \to 1}(x - 3) = -2$ létezik és véges $\Rightarrow f'(x) = -2$. Tehát a parabola érintőjének meredeksége $x = 1$ helyen -2.

Differenciahányados x_0-ban:

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x^2-4x+5)-(x_0^2-4x_0+5)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2-4x+4x_0}{x-x_0} = \\ &= \frac{(x+x_0)(x-x_0)-4(x-x_0)}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0-4)}{x-x_0} = x+x_0-4 \end{aligned}\right\} \text{ ha } x \neq x_0$$

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0}(x + x_0 - 4) = 2x_0 - 4 \Rightarrow$ tetszőleges x pontban: $f'(x) = 2x - 4$.

DEFINÍCIÓ: Ha f függvénynél az értelmezési tartomány minden olyan pontjához, ahol f differenciálható hozzárendeljük a differenciahányados értékét, akkor az f függvény **differenciálhányados (derivált) függvény**ét kapjuk. Jelölés: $f'(x)$.

TÉTEL: Deriválási szabályok (f és g függvények deriválhatóak az x helyen, és deriváltjuk itt $f'(x)$, illetve $g'(x)$):

1. $f(x) = c$, $c =$ állandó $\Rightarrow f'(x) = 0$
2. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$
3. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
4. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
6. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

TÉTEL: Elemi függvények deriváltjai:

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, ha $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^+$.
2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, ha $a > 0$, $a \neq 1$.
   $(e^x)' = e^x$.
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, ha $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.
4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, ha $x > 0$.
5. $(\sin x)' = \cos x$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$.

TÉTEL: Hatványfüggvény deriváltfüggvénye: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, ha $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^+$.

BIZONYÍTÁS: teljes indukcióval

$n = 1$-re igaz: $f(x) = x^1$ esetében

$$\left.\begin{aligned} &\text{bal oldal: } f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = \lim_{x - x_0} 1 = 1 \Rightarrow (x^1)' = 1 \\ &\text{jobb oldal: } 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{igaz}.$$

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz: $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$.

Bizonyítjuk az öröklődést: $(x^{k+1})' = (k + 1) \cdot x^k$.

Bal oldal:

$$(x^{k+1})' \underset{\substack{\text{hatványozás} \\ \text{azonossága}}}{=} (x \cdot x^k)' \underset{\substack{\text{szorzat} \\ \text{deriváltja}}}{=} x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)' = 1 \cdot x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} = x^k + k \cdot x^k = (k+1) \cdot x^k$$

Ez pedig pontosan a jobb oldal, ezzel állításunkat bebizonyítottuk.□

IV. A differenciálszámítás alkalmazása

Függvény adott pontbeli érintője

Ha az $f(x)$ függvény az x_0 pontban differenciálható, akkor grafikonjának az $(x_0; f(x_0))$ pontban van érintője és $f'(x_0)$ ebben a pontban az érintő meredeksége. Ekkor a függvény x_0-beli érintőjének egyenlete: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Függvényvizsgálat

TÉTEL: Az f függvény az $]a, b[$ intervallum minden pontjában differenciálható. Ha az intervallum minden x pontjában

- $f'(x) > 0$, akkor f az $]a; b[$-n **szigorúan monoton nő**.
- $f'(x) < 0$, akkor f az $]a; b[$-n **szigorúan monoton csökken**.
- $f'(x) \geq 0$, akkor f az $]a; b[$-n **monoton nő**.
- $f'(x) \leq 0$, akkor f az $]a; b[$-n **monoton csökken**.

TÉTEL: Legyen az f függvény az $]a, b[$ minden pontjában differenciálható. Ha az intervallum egy x_0 pontjában a deriváltja 0 és ott a derivált függvény előjelet vált, akkor x_0-ban az f függvénynek lokális szélsőértéke van. Ha negatívból pozitívba vált a deriváltfüggvény előjele (az f szigorúan monoton csökkenőből vált szigorúan monoton növőre), akkor **lokális minimuma**, ha pozitívból negatívba vált, akkor **lokális maximuma** van.

TÉTEL: Legyen az f függvény az $]a, b[$ minden pontjában kétszer differenciálható. Ha az intervallum egy x_0 pontjában az első derivált 0 és a második derivált nem nulla, akkor x_0-ban az f függvénynek lokális szélsőértéke van. Ha $f''(x_0) > 0$, akkor **lokális minimuma**, ha $f''(x_0) < 0$, akkor **lokális maximuma** van.

TÉTEL: Legyen az f függvény egy $[a, b]$-n deriválható és legyen az f' függvény is deriválható $[a, b]$-n. Ha az $[a, b]$ minden pontjában $f''(x) \geq 0$, akkor f az $[a, b]$-n **konvex**, ha $f''(x) \leq 0$, akkor **konkáv**.

TÉTEL: Legyen az f függvény egy $[a, b]$-n deriválható és legyen az f' függvény is deriválható $[a, b]$-n. Ha az intervallum egy x_0 pontjában $f''(x) = 0$ és itt az f'' függvény előjelet vált, akkor x_0 pontban az f függvénynek **inflexiós pont**ja van.

V. Szélsőérték-problémák vizsgálata differenciálszámítással

A szélsőérték feladat szövegének értelmezése után felírjuk a változók közti összefüggéseket. Ha több változó van, akkor az egyik segítségével kifejezzük a többit és beírjuk abba a kifejezésbe, amelynek szélsőértékét vizsgáljuk. Így kapunk egy **egyváltozós függvényt,** aminek a szélsőértékét kell meghatározni. Ezt a nevezetes közepek közti összefüggésekkel, a függvénytulajdonságok (transzformáció) alapján, valamint deriválással lehet megállapítani:

Lokális szélsőértéke van a differenciálható függvénynek x_0-ban, ha ott az első derivált 0, és a derivált ebben a pontban előjelet vált, azaz a második derivált nem nulla. A derivált zérushelye szükséges, de nem elégséges feltétele a helyi szélsőérték létezésének.
Minimuma van, ha az első derivált negatívból pozitívba vált, illetve ha a második derivált ezen a helyen pozitív; maximuma van, ha az első derivált pozitívból negatívba vált, illetve ha a második derivált negatív ezen a helyen,

Szélsőértékvizsgálat $f'(x)$ segítségével: az $f(x)$ differenciálható függvényt deriváljuk, kiszámoljuk a zérushelyét, majd a zérushely segítségével megállapítjuk deriváltjának előjelét. Ehhez vagy az alapfüggvények tulajdonságait használjuk, vagy a szorzat, illetve hányados előjelét vizsgáljuk. Utóbbira akkor van szükség, ha az első derivált nem az alapfüggvények közül kerül ki, ekkor a deriváltat a lehető legjobban szorzattá, illetve hányadossá alakítjuk. Az első derivált előjeléből következtetni

tudunk a függvény monotonitási viszonyaira is: azon az intervallumon, ahol a függvény első deriváltja pozitív, a függvény nő, ahol negatív, ott a függvény csökken.
Pl.: $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$.
$f'(x)$ zérushelye: $x = \pm 1$
$f'(x)$ előjele:

$f'(x) > 0$, ha $x < -1$, $f'(x) < 0$ ha $-1 < x < 1$, tehát lokális maximuma van az $x = -1$ helyen, értéke $f(-1) = 2$.

$f'(x) < 0$ ha $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0$, ha $x > 1$, tehát lokális minimuma van az $x = +1$ helyen, értéke $f(1) = -2$

A függvény szigorúan monoton nő, ahol $f'(x) > 0$, azaz $x \in]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$, szigorúan monoton csökken, ahol $f'(x) < 0$, azaz $x \in]-1; 1[$.

Szélsőértékvizsgálat $f''(x)$ segítségével: az $f(x)$ kétszer differenciálható függvényt kétszer deriváljuk, kiszámoljuk az első derivált zérushelyét, majd a zérushelyeket behelyettesítjük a második deriváltba, megállapítjuk második deriváltjának előjelét. A második derivált előjeléből következtetni tudunk a függvény görbületi viszonyaira is: azon az intervallumon, ahol a második deriváltja pozitív, a függvény konvex, ahol negatív, ott a függvény konkáv, ahol a második derivált előjelet vált és a függvény folytonos ebben a pontban, inflexiós pontja van a függvénynek.
Pl.: $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x$.
$f'(x)$ zérushelye: $x = \pm 1$
$f''(x)$ előjele:

$f''(-1) = -6$, tehát lokális maximuma van az $x = -1$ helyen, értéke $f(-1) = 2$.

$f''(1) = 6$, tehát lokális minimuma van az $x = +1$ helyen, értéke $f(1) = -2$.

$f''(x) = 0$, ha $x = 0$, és ebben a pontban előjelet vált, negatívból pozitívba megy át, azaz a függvény konkávból konvexbe vált, vagyis inflexiós pontja van az $x = 0$ pontban.

VI. Alkalmazások:

- *gazdasági problémák megoldása:*
  - Ha egy áru iránti kereslet függ a termék árától, akkor milyen ár esetén érhető el maximális összbevétel?
  - Ha egy termék előállítási költsége függ a termék reklámozására fordított összegtől, akkor mekkora reklámköltség esetén érhető el egy termék minimális előállítási költsége?

- *matematikai problémák megoldása:*
  - Adott térfogatú folyadéknak milyen méretekkel rendelkező hengeres dobozt tervezzünk, hogy a felhasznált csomagolóanyag mennyiség minimális legyen?
  - Adott sugarú gömbbe írt hengerek közül melyiknek a térfogata maximális?
  - Adott alapkörsugarú és magasságú forgáskúpba olyan forgáshengert írunk, amelynek alapköre a kúp alapkörének része, fedőköre pedig illeszkedik a kúp palástjára. Milyen esetben lesz a henger térfogata maximális?

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A XVII. században **Descartes** (1596–1650) francia matematikus foglalkozott először a függvényekkel: bevezette a változó fogalmát, a függvényt megfeleltetésnek tekintette. Ezután elkezdték vizsgálni a matematikusok a függvénygörbék és érintőinek kapcsolatát. Az érintőket vizsgálva eljutottak a differenciálhányados fogalmához, módszert dolgoztak ki a függvények menetének vizsgálatára, szélsőértékeinek megállapítására.
- Az analízis alapvető fogalmait (pl, sorozat, konvergencia, határérték) **Cauchy** (1789–1857) francia matematikus definiálta. Ő az, aki pontosan leírta a differenciál- és integrálszámítást, előtte azonban pontosította a határérték fogalmát.

12. Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek. A hegyesszögek szögfüggvényei. A szögfüggvények általánosítása.

Vázlat:

I. Derékszögű háromszögek definíciója
II. Pitagorasz-tétel és megfordítása
Thalész tétel és megfordítása
Magasságtétel, befogótétel
Beírt kör sugarára vonatkozó tétel
III. Hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója
IV. Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között
V. A szögfüggvények általános definíciója
VI. Kapcsolatok egyazon szög szögfüggvényei közt
VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Derékszögű háromszögek

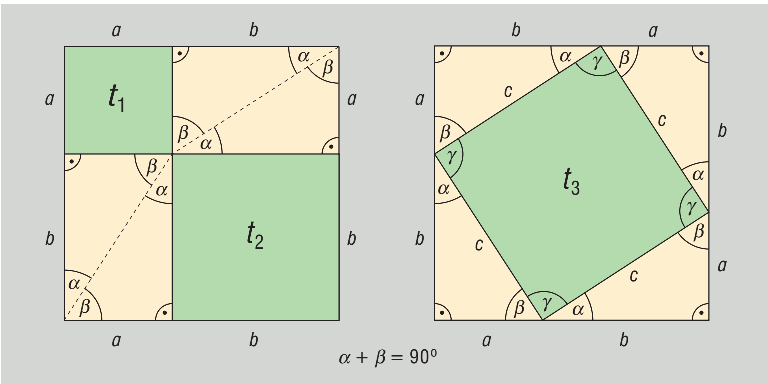
DEFINÍCIÓ: Azokat a háromszögeket, amelyeknek valamely szöge 90º, azaz derékszög, **derékszögű háromszög**eknek nevezzük.
A derékszöget bezáró két oldalt befogónak, a derékszöggel szemközti, egyben a leghosszabb oldalt átfogónak nevezzük.

II. Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek

A derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek közül a Pitagorasz-tétel teremt kapcsolatot a háromszög oldalai között.

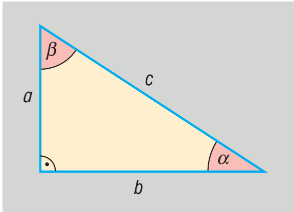
TÉTEL: Pitagorasz-tétel: Ha egy háromszög derékszögű, akkor befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.

BIZONYÍTÁS I.: Bizonyítani kell: $a^2 + b^2 = c^2$.
Vegyünk fel két $a + b$ oldalú négyzetet. A két négyzet területe egyenlő.



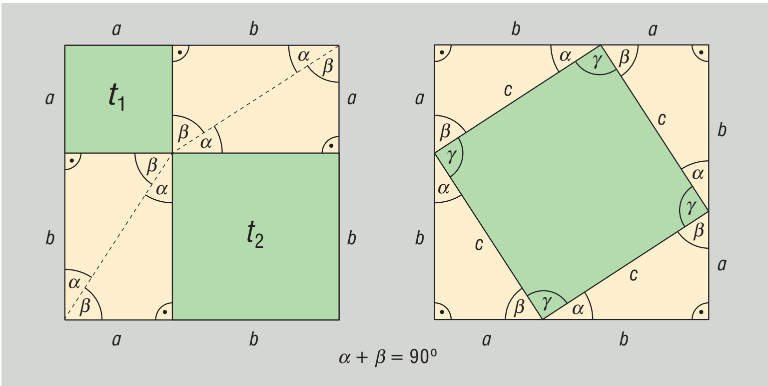
Az első négyzet felosztható egy $t_1 = a^2$ és egy $t_2 = b^2$ területű négyzetre (a felosztásából eredő párhuzamosság miatt), továbbá 4 olyan derékszögű háromszögre, amelynek befogói a, illetve b. Ez a 4 háromszög egybevágó egymással és az eredeti háromszöggel, tehát területük egyenlő.

A második négyzetben elhelyezkedő négyszög négyzet, mivel oldalai egyenlő hosszúak (egybevágó derékszögű háromszögek átfogói), szögei pedig 90º-osak (egybevágó derékszögű háromszögben $\alpha + \beta = 90º$). Ha a derékszögű háromszögek átfogója c, akkor területe $t_3 = c^2$.



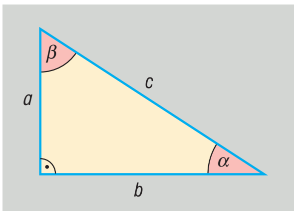
Mindkét nagy négyzet területéből kivonva a 4-4 egybevágó háromszög területét, a fennmaradó területek egyenlők lesznek.□

BIZONYÍTÁS II.: Vegyünk fel egy derékszögű háromszöget, amelynek befogói a és b, és egy $a + b$ oldalú négyzetet. A négyzetben helyezzük el a háromszögeket:



$ABCD$ négyszög négyzet, mert oldalai egyenlők (c), és szögei 90º-osak ($\gamma = 180º - (\alpha + \beta) = 180º - 90º = 90º$), így az $a + b$ oldalú négyzet területe kétféleképpen: $t = (a + b)^2$, illetve $t = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2$, azaz

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.□$$

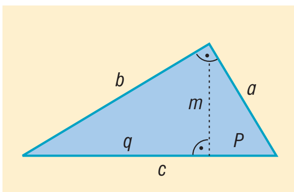


BIZONYÍTÁS III.: Befogótétellel

Befogótétel miatt:

$$a = \sqrt{p \cdot c}, \quad \text{illetve} \quad b = \sqrt{q \cdot c} = \sqrt{(c-p) \cdot c}.$$

Ebből $a^2 = p \cdot c$, illetve $b^2 = (c - p) \cdot c = c^2 - p \cdot c$.



Összeadva az utolsó két egyenlőséget:

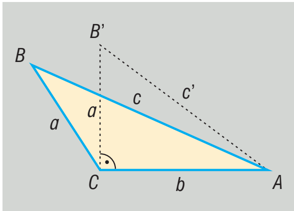
$$a^2 + b^2 = p \cdot c + c^2 - p \cdot c = c^2 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = c^2.\square$$

BIZONYÍTÁS IV.: Koszinusztétellel

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\underbrace{\cos 90°}_{0} = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; c^2 = a^2 + b^2 .\square$$

TÉTEL: Pitagorasz-tétel megfordítása: ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

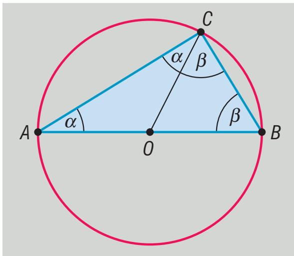
BIZONYÍTÁS:



Tudjuk, hogy az ABC háromszög oldalaira igaz: $a^2 + b^2 = c^2$. Az a, b befogókkal rajzolunk egy $AB'C$ derékszögű háromszöget, amelyre Pitagorasz tétele miatt $a^2 + b^2 = (c')^2 \Rightarrow c^2 = (c')^2 \Rightarrow c = c'$. Ekkor az ABC ill. $AB'C$ háromszög oldalai páronként megegyeznek $\Rightarrow$ a két háromszög egybevágó $\Rightarrow$ megfelelő szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$ C-nél ABC háromszögben derékszög van. □

TÉTEL: Thalész-tétel: ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk.

BIZONYÍTÁS: O középpontú kör, AB átmérő, C tetszőleges pont a körvonalon.



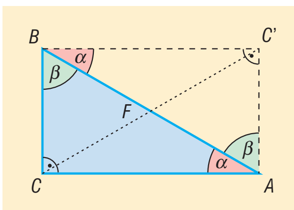
$OA = OC = r \Rightarrow OAC$ háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow OAC\sphericalangle = OCA\sphericalangle = \alpha$.

$OC = OB = r \Rightarrow OBC$ háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow OBC\sphericalangle = BCO\sphericalangle = \beta$.

Az ABC háromszög belső szögeinek összege 180º $\Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180º \Rightarrow \alpha + \beta = 90º \Rightarrow ACB\sphericalangle = 90º$. □

TÉTEL: Thalész-tétel megfordítása: ha egy háromszög derékszögű, akkor köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja.

BIZONYÍTÁS: ABC derékszögű háromszöget tükrözzük az átfogó F felezőpontjára. A tükrözés tulajdonságai miatt $BC = AC'$ és $CA = BC'$ és $AC' = BC'$ szögei 90º-osak. A téglalap átlói egyenlők és felezik egymást $\Rightarrow FA = FB = FC \Rightarrow F$ az ABC háromszög köré írt kör középpontjával egyenlő. □



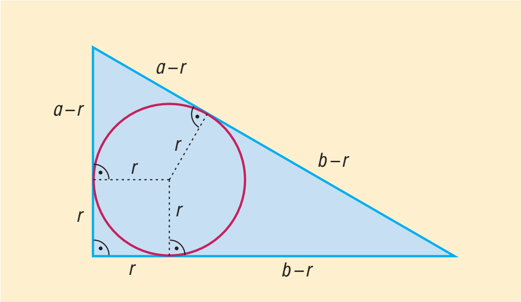
TÉTEL: Thalész-tétel és megfordítása összefoglalva: a sík azon pontjainak halmaza, amelyekből egy megadott szakasz derékszögben látszik, a szakaszhoz, mint átmérőhöz tartozó kör, elhagyva belőle a szakasz végpontjait.

TÉTEL: Magasságtétel: Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyekre a magasság az átfogót osztja.

TÉTEL: Befogótétel: Derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának.

TÉTEL: Beírt kör sugarára vonatkozó tétel: Derékszögű háromszög átfogója a két befogó összegével és a beírt kör sugarával kifejezve: $c = a + b - 2r$.

BIZONYÍTÁS: Körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $c = a - r + b - r = a + b - 2r$.



A Thalész-tétel miatt $c = 2R$, ahol R a háromszög köré írt kör sugara. Ebből és az előző tételből következik: $2R = a + b - 2r \;\Rightarrow\; R + r = \dfrac{a+b}{2}$. □

III. Hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója

A hegyesszögek szögfüggvényeit derékszögű háromszögekkel is bevezethetjük. Kihasználjuk, hogy a két derékszögű háromszög hasonló, ha valamely hegyesszögük megegyezik. A hasonlóság következtében egy derékszögű háromszög oldalainak arányát a háromszög egyik hegyesszöge egyértelműen meghatározza. Erre a függvényszerű kapcsolatra vezetjük be a szögfüggvényeket:

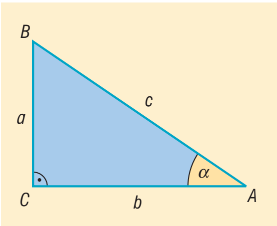
DEFINÍCIÓ: Az α hegyesszöget tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben

$\sin\alpha$ = α-val szemközti befogó hosszának és az átfogó hosszának hányadosa.

$\cos\alpha$ = α melletti befogó hosszának és az átfogó hosszának a hányadosa.

$\mathrm{tg}\,\alpha$ = α-val szemközti befogó hosszának és az α melletti befogó hosszának a hányadosa.

$\mathrm{ctg}\,\alpha$ = α melletti befogó hosszának és az α-val szemköztes befogó hosszának a hányadosa.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b},\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$$

IV. Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között

A definíciók alapján könnyen igazolhatók a következő **azonosságok**, ahol $0^\circ < \alpha < 90^\circ$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

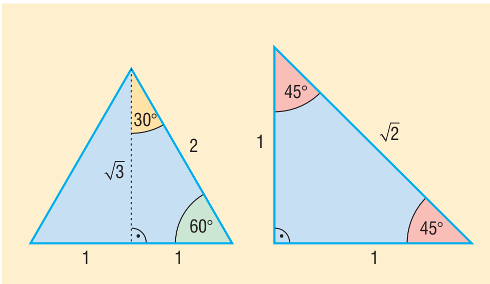
$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha),\quad \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha),\quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

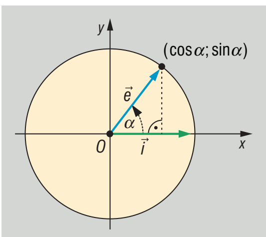
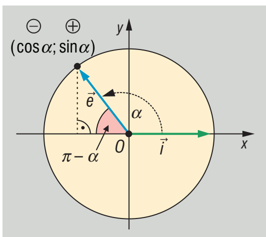
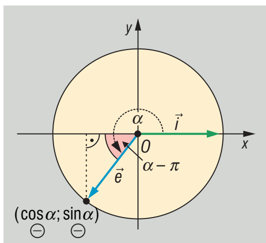
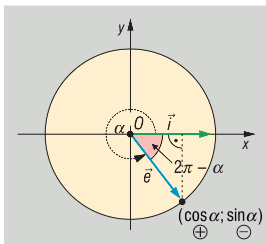
Nevezetes szögek szögfüggvényei:

	sin	**cos**	**tg**	**ctg**
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

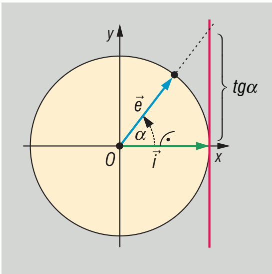
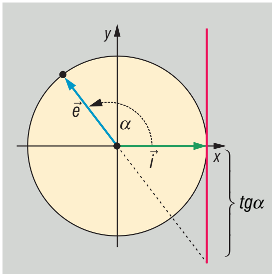
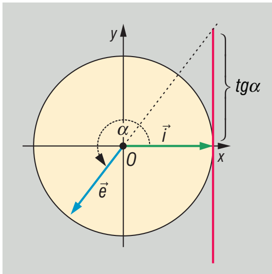
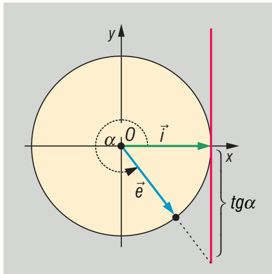


V. Szögfüggvények általánosítása

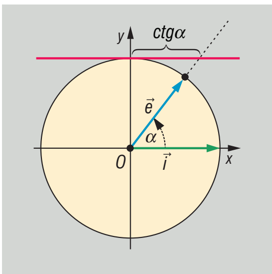
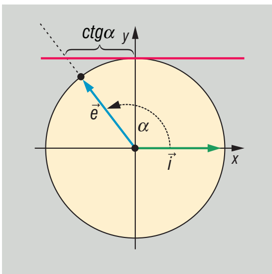
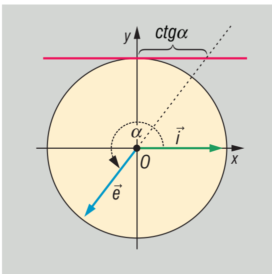
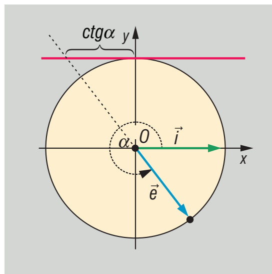
Definíció: A **koordinátarendszer**ben az $\underline{i}(1; 0)$ bázisvektor origó körüli α szöggel való elforgatásával keletkező $\underline{e}$ egységvektor első koordinátája az **α szög koszinusza**, második koordinátája az **α szög szinusza**.

<table>
<tr><th>$\alpha \in$ I.</th><th>$\alpha \in$ II.</th><th>$\alpha \in$ III.</th><th>$\alpha \in$ IV.</th></tr>
<tr><td>$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$</td><td>$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$</td><td>$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$</td><td>$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$
$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$</td><td>$\cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi)$
$\sin\alpha = -\sin(\alpha - \pi)$</td><td>$\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$
$\sin\alpha = -\sin(2\pi - \alpha)$</td></tr>
</table>

DEFINÍCIÓ: A $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ hányadost, ha $\cos\alpha \neq 0$, vagyis ha $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, az α szög tangensének nevezzük.
A koordinátarendszerben az $\underline{i}$ vektortól α szöggel elforgatott $\underline{e}$ egységvektor egyenese által az origó középpontú, egységsugarú kör (1; 0) pontjában húzott érintőből kimetszett pont 2. koordinátája az α **szög tangense**.

$\alpha \in$ **I.**	$\alpha \in$ **II.**	$\alpha \in$ **III.**	$\alpha \in$ **IV.**
$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
			
	$\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}(\pi - \alpha)$	$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}(\alpha - \pi)$	$\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}(2\pi - \alpha)$

DEFINÍCIÓ: A $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ hányadost, ha $\sin\alpha \neq 0$, vagyis ha $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, az α szög kotangensének nevezzük.
A koordinátarendszerben az $\underline{i}$ vektortól α szöggel elforgatott $\underline{e}$ egységvektor egyenese által az origó középpontú, egységsugarú kör (0;1) pontjában húzott érintőből kimetszett pont 1. koordinátája az α **szög kotangense**.

$\alpha \in$ **I.**	$\alpha \in$ **II.**	$\alpha \in$ **III.**	$\alpha \in$ **IV.**
$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
			
	$\text{ctg}\,\alpha = -\text{ctg}(\pi - \alpha)$	$\text{ctg}\,\alpha = \text{ctg}(\alpha - \pi)$	$\text{ctg}\,\alpha = -\text{ctg}(2\pi - \alpha)$

VI. Kapcsolatok egyazon szög szögfüggvényei között:

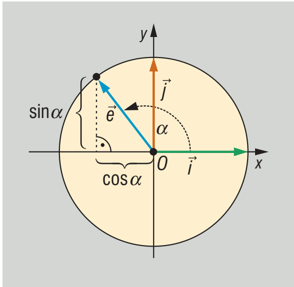
TÉTEL: $\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$, ha $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{ctg}\,\alpha}$, ha $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow\ \text{tg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = 1 \quad \left(\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}\right)$

TÉTEL: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ minden valós α-ra (Pitagoraszi összefüggés).

BIZONYÍTÁS: A szögfüggvények definíciója szerint az α irányszögű $\underset{\sim}{e}$ egységvektor koordinátái: $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$.



Egyrészt az egységvektor hossza 1: $(\left|\underset{\sim}{e}\right| = 1)$, másrészt az $\underset{\sim}{e}$ vektor hossza: $\left|\underset{\sim}{e}\right| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$.

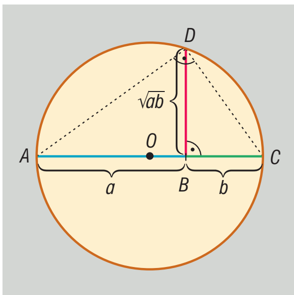
Ebből $1 = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$. Mivel nemnegatív számok állnak a két oldalon, négyzetre emeléssel: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.□

KÖVETKEZMÉNY: tetszőleges α szög esetén:

$$\left|\sin\alpha\right| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \text{illetve} \quad \left|\cos\alpha\right| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

VII. Alkalmazások:

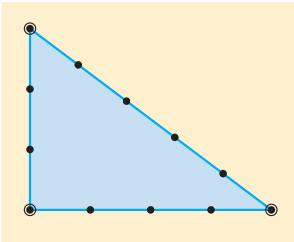
- Pitagorasz-tétel:
  - síkgeometria: háromszög, trapéz magasságának számolása
  - koordinátageometria: két pont távolsága, vektor hossza
- Thalész-tétel:
  - síkgeometria: körhöz külső pontból húzott érintők szerkesztése
  - koordinátageometria.: érintők egyenlete
- Magasságtétel:
  - mértani közép szerkesztése



- Forgásszögek szögfüggvényei:
  - Háromszög trigonometrikus területképlete
  - Szinusztétel, koszinusztétel
  - Négyszög területe: $t = \dfrac{e \cdot f \cdot \sin\alpha}{2}$ $(e, f$ átlók, $\alpha =$ átlók szöge$)$
  - Rezgőmozgás kitérés-idő, sebesség-idő, gyorsulás-idő függvénye trigonometrikus függvény

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A derékszögű háromszögekről fennmaradt első írásos emlékek a **Rhind-papíruszon** kb. Kr.e. 1750-ből találhatók: ismerték a 3, 4, 5 oldalú derékszögű háromszöget.
- Kr.e. 2000 körül az **egyiptomi papok** derékszögszerkesztésre csomózott kötelet használtak, amihez ismerniük kellett a Pitagorasz tételt: terepen a derékszög kitűzését 12 csomós kötél és 3 karó segítségével: végezték.



- **Kínában** Kr.e. 1200 és 1100 közötti naptárban olyan rajz látható, amely azt mutatja, hogy ismerték a Pitagorasz tételt legalább a 3, 4, 5 oldalú derékszögű háromszög esetében. Ezen a rajzon egy 3+4 egység oldalú négyzet kerületén van a belső 5 egység hosszúságú négyzet csúcspontjai (a Pitagorasz tétel I. bizonyításában szereplő ábrához hasonlóan).
- **Pitagorasz** a Kr.e. VI. században az ókori Görögországban élt, tételét viszont már a babilóniaiak 4000 évvel ezelőtt is ismerték, Pitagoraszhoz csak azért fűződik a tétel, mert rájött egy új bizonyításra.
- **Thalész** szintén a Kr.e. VI. században élt az ókori Görögországban, az első olyan matematikus volt, akinek bizonyítási igénye volt. Neki tulajdonítják a szög fogalmának kialakítását.
- **Ptolemaiosz** görög csillagász a Kr.u. II. században 30 percenkénti beosztással készített „húrtáblázatokat”, ami a később kialakult trigonometrikus függvények elődei voltak.
- A trigonometrikus függvények közti összefüggések és azonosságok felfedésében nagy érdemei vannak **Viète** (1540–1603) francia matematikusnak.

13. Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai és körei.

Vázlat:

I. Oldalfelező merőlegesek, a háromszög köré írt kör középpontja
II. Szögfelezők, háromszögbe, illetve háromszöghöz írt kör középpontja
III. Magasságvonalak, a háromszög magasságpontja
IV. Súlyvonalak, a háromszög súlypontja
V. Középvonalak
VI. Euler-egyenes, Feuerbach kör
VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

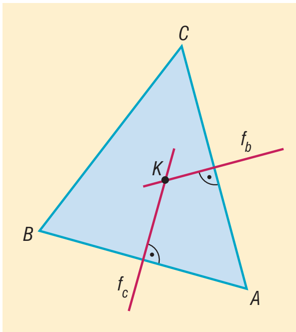
I. Oldalfelező merőlegesek, a háromszög köré írt kör középpontja

DEFINÍCIÓ: A síkon egy **szakasz felezőmerőlegese** az az egyenes, amely a szakasz felezőpontjára illeszkedik és merőleges a szakaszra.

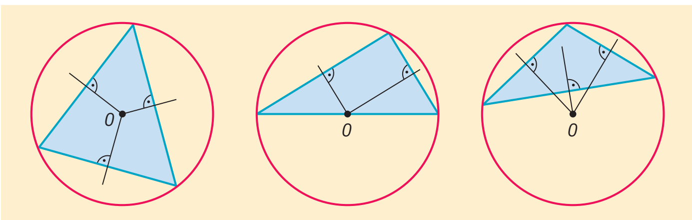
TÉTEL: A szakasz felezőmerőlegese a szakasz két végpontjától egyenlő távol lévő pontok halmaza.

TÉTEL: A háromszög három oldalfelező merőlegese egy pontban metszi egymást. Ez a pont a **háromszög köré írt kör középpontja**.

BIZONYÍTÁS: ABC háromszögben AB és AC oldalfelező merőlegeseit tekintsük. Ezek az egyenesek metszik egymást, mert a háromszög oldalai nem párhuzamosak egymással. Legyen a két oldalfelező merőleges metszéspontja K. Ekkor K egyenlő távolságra van A-tól és B-től (mert K illeszkedik f_c-re), illetve A-tól és C-től (mert K illeszkedik f_b-re) is. Következésképpen egyenlő távol van B-től és C-től is, azaz K illeszkedik BC szakaszfelező merőlegesére. $\Rightarrow$ $KA = KB = KC$, azaz A, B és C egyenlő távolságra vannak K-tól $\Rightarrow$ mindhárom pont illeszkedik egy K középpontú $KA = KB = KC = r$ sugarú körre.□



K hegyesszögű háromszög esetén a háromszögön belül, derékszögű háromszögnél az átfogó felezőpontjába (Thalész tétele), tompaszögű háromszögnél a háromszögön kívül esik.



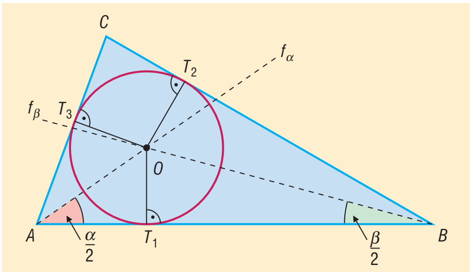
II. Szögfelezők, háromszögbe, illetve háromszöghöz írt kör középpontja

DEFINÍCIÓ: Egy konvex szög **szögfelező**je a szög csúcsából kiinduló, a szögtartományban haladó azon félegyenes, amely a szöget két egyenlő nagyságú szögre bontja.

TÉTEL: Egy konvex szögtartományban a száraktól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a szögfelező.

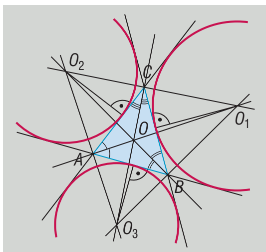
TÉTEL: A háromszög három belső szögfelezője egy pontban metszi egymást. Ez a pont a **háromszögbe írt kör középpontja**.

BIZONYÍTÁS:



Két belső szögfelező metszéspontjáról belátjuk, hogy rajta van a harmadikon. Vegyük fel az α és β szögfelezőjét: f_α és f_β. Ez a két félegyenes metszi egymást, mert $0° < \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < 180°$. Így f_α és f_β metszéspontja az O pont. A szögfelező a szög száraitól egyenlő távol lévő pontok halmaza a szögtartományban, így mivel O illeszkedik f_α-ra $\Rightarrow OT_1 = OT_3$, illetve O illeszkedik f_β-ra $\Rightarrow OT_1 = OT_2$, tehát $OT_2 = OT_3$, vagyis O egyenlő távol van az AC és a CB szögszáraktól, így O illeszkedik f_γ-ra, azaz O az f_α, f_β és f_γ egyetlen közös pontja.
A bizonyítás során kiderült, hogy O egyenlő távol van a háromszög oldalaitól, ezért köréje egy olyan kör írható, amely a háromszög oldalait érinti. □

TÉTEL: A háromszög egy belső, és a másik két csúcshoz tartozó külső szögfelezője egy pontban metszi egymást, ez a pont **a háromszög hozzáírt körének középpontja**. A háromszögnek 3 hozzáírt köre van.



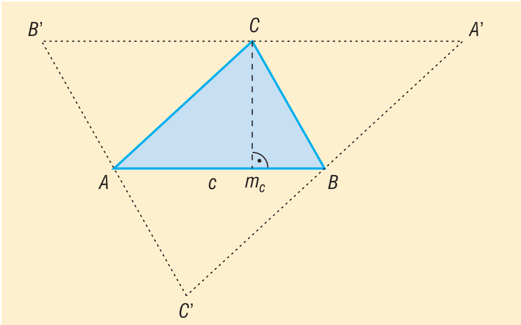
TÉTEL: A háromszög ugyanazon szögének külső és belső szögfelezője merőleges egymásra.

III. Magasságvonalak, a háromszög magasságpontja

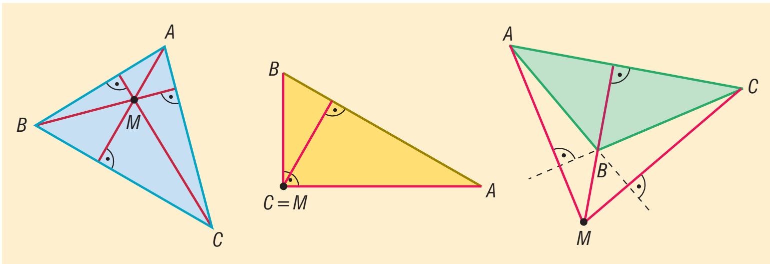
DEFINÍCIÓ: A háromszög **magasság**a az egyik csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges szakasz. A háromszög magasságának egyenese a háromszög **magasságvonal**a.

TÉTEL: A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög **magasságpontja**.

BIZONYÍTÁS: Visszavezetjük a háromszög oldalfelező merőlegeseire vonatkozó tételre.



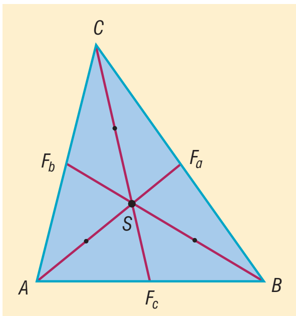
Vegyük fel az ABC háromszöget, és mindhárom csúcsán keresztül húzzunk párhuzamos egyenest a szemközti oldallal. $\Rightarrow$ $A'B'C'$ háromszög.
Belátjuk, hogy m_c az $A'B'$ oldalfelező merőlegese: m_c merőleges AB-re és $A'B'$ párhuzamos AB-vel $\Rightarrow$ m_c merőleges $A'B'$-re. AB párhuzamos $A'B'$-vel és BC párhuzamos $B'C'$-vel $\Rightarrow$ $ABCB'$ paralelogramma $\Rightarrow$ $CB' = AB$, hasonlóan $ABA'C$ paralelogramma $\Rightarrow$ $A'C = AB$, ebből $B'C = CA'$ $\Rightarrow$ C felezőpontja $A'B'$-nek $\Rightarrow$ m_c oldalfelező merőlegese $A'B'$-nek.
Hasonlóan belátható, hogy m_a és m_b is az $A'B'C'$ háromszög oldalfelező merőlegesei. Az oldalfelező merőlegesekre vonatkozó tétel alapján tudjuk, hogy ezek egy pontban metszik egymást, tehát beláttuk, hogy az ABC háromszög magasságvonalai is egy pontban metszik egymást.□
A magasságpont hegyesszögű háromszög esetén a háromszög belsejében, derékszögű háromszögnél a derékszögű csúcsban, tompaszögű háromszögnél a háromszögön kívül helyezkedik el.



IV. Súlyvonalak, a háromszög súlypontja

DEFINÍCIÓ: A háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz a **háromszög súlyvonala**.

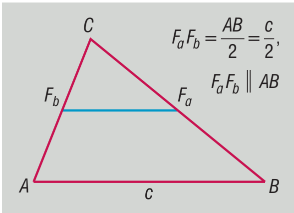
TÉTEL: A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, ezt a pontot a háromszög **súlypont**jának nevezzük. A súlypont harmadolja a súlyvonalakat úgy, hogy a csúcs felé eső szakasz úgy aránylik az oldal felé eső szakaszhoz, mint 2 : 1.



V. Középvonalak

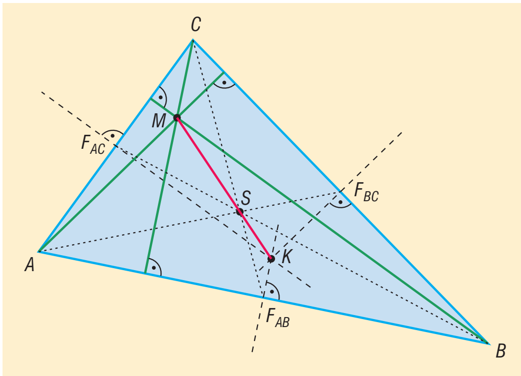
DEFINÍCIÓ: A háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakaszt a **háromszög középvonalának** nevezzük.
Minden háromszögnek 3 középvonala van.

TÉTEL: A háromszög középvonala párhuzamos a felezőpontokat nem tartalmazó oldallal, és fele olyan hosszú.

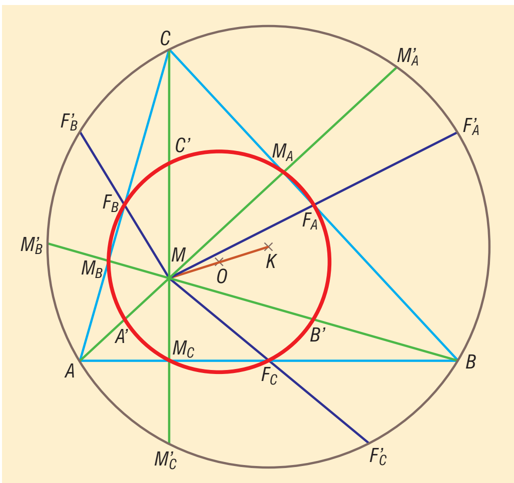


VI. Euler-egyenes, Feuerbach-kör

TÉTEL: A háromszög magasságpontja, súlypontja és a körülírt kör középpontja egy egyenesen van (**Euler-féle egyenes**). A súlypont a másik kettő távolságát harmadolja és a körülírt kör középpontjához van közelebb.



TÉTEL: Egy háromszög oldalainak felezőpontjai, magasságainak talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körön vannak (**Feuerbach-kör**).
A Feuerbach kör középpontja (O) felezi a magasságpontot (M) és a köré írható kör középpontját (K) összekötő szakaszt, sugara a háromszög köré írható kör sugarának a fele. Vagyis az M pontból a köré írt kör középpontjából $\lambda = \frac{1}{2}$ -es arányú kicsinyített képe a Feuerbach kör.



VII. Alkalmazások:

- háromszögszerkesztési feladatok
- koordináta-geometria: 3 ponton átmenő kör egyenlete, háromszög súlypontjának kiszámítása
- súlyvonal, súlypont (homogén anyageloszlású háromszög esetén) fizikában: súlyvonal mentén, illetve súlypontban alátámasztva a háromszög egyensúlyban van
- kör középpontjának szerkesztése
- területszámítási feladatok a nevezetes körök sugarainak felhasználásával

$$R = \frac{abc}{4t}, \quad r = \frac{t}{s}, \quad \text{ahol} \quad s = \frac{k}{2}.$$

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A geometria görög szó, eredeti jelentése földmérés. A geometria az ókori görög matematikusok tevékenysége által vált tudománnyá. **Thalész**en, a matematika atyján kívül a legnagyobb görög geométernek tartott **Apollóniusz** (Kr.e. III. századi görög matematikus) is sokat foglalkozott a háromszögekkel és a velük kapcsolatos összefüggésekkel. A tételben szereplő ismeretek nagy részét már ők is tudták.
- **Thalész** a Kr.e. VI. században élt az ókori Görögországban, az első olyan matematikus volt, akinek bizonyítási igénye volt, foglalkozott állításai megfordításával is: így jutott el a derékszögű háromszög köré írt kör középpontjához.
- **Euklidesz** Kr.e. 300 körül élt görög matematikus Elemek című művében meghatározta a geometriai alapszekesztések axiómáit, szögletes síkidomok tulajdonságait, A Pitagorasz-tételt, a kör és vele kapcsolatos tételeket, a kerületi és középponti szögeket, a szabályos sokszögek szerkesztését.
- **Euler** (1707–1783) svájci matematikus a háromszög nevezetes vonalait, pontjait is vizsgálta, ismerte a Feuerbach-kört, de ez a tétel feledésbe merült.
- **Feuerbach** (1800–1834) német matematikus újra felfedezte az Euler által már megtalált kört, amit ezután Feuerbachról neveztek el.

14. Összefüggések az általános háromszögek oldalai között, szögei között, oldalai és szögei között.

Vázlat:

I. Háromszögek csoportosítása szögeik és oldalaik szerint
II. Összefüggések a háromszög oldalai között (háromszög egyenlőtlenségek, Pitagorasz-tétel)
III. Összefüggések a háromszög szögei között (belső, külső szögek)
IV. Összefüggések a háromszög szögei és oldalai között (koszinusztétel, szinusztétel, szögfüggvények)
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Háromszögek csoportosítása szögeik és oldalaik szerint

DEFINÍCIÓ: **Háromszög** az a zárt szögvonal, amelyeknek 3 oldala és 3 csúcsa van.

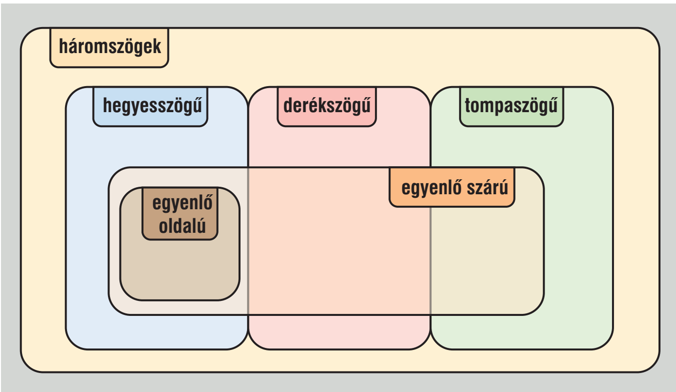
DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **hegyesszögű**, ha minden szöge hegyesszög.

DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **derékszögű**, ha van egy 90º-os szöge.

DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **tompaszögű**, ha van egy tompaszöge.

DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **szabályos** (vagy egyenlő oldalú), ha három oldala egyenlő hosszú.

DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **egyenlő szárú** (vagy szimmetrikus), ha van két egyenlő oldala.



II. Összefüggések a háromszög oldalai közt:

TÉTEL: Háromszög egyenlőtlenségek: a háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadiknál: $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$.

TÉTEL: Egy háromszögben bármely két oldal különbségének abszolút értéke kisebb a harmadiknál: $|a - c| < b$, $|a - b| < c$, $|b - c| < a$.

TÉTEL: Pitagorasz tétel: Bármely derékszögű háromszögben a két befogó négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

III. Összefüggések a háromszög szögei közt:

TÉTEL: A háromszög belső szögeinek összege 180º.

TÉTEL: A háromszög külső szögeinek összege 360º.

TÉTEL: A háromszög egy külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.

IV. Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között:

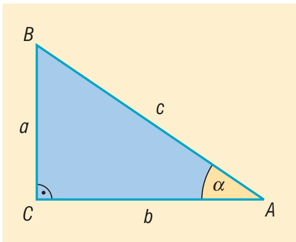
TÉTEL: Egy háromszögben egyenlő hosszúságú oldalakkal szemben egyenlő nagyságú szögek vannak, egyenlő nagyságú szögekkel szemben egyenlő hosszúságú oldalak vannak.

TÉTEL: Bármely háromszögben két oldal közül a hosszabbikkal szemben nagyobb belső szög van, mint a rövidebbikkel szemben, illetve két szög közül a nagyobbikkal szemben hosszabb oldal van, mint a kisebbikkel szemben.

DEFINÍCIÓ: Derékszögű háromszögben bevezetjük a **szögfüggvények** fogalmát a hasonló háromszögek tulajdonságait kihasználva:

- $\sin\alpha$ az α szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosa,
- $\cos\alpha$ az α szög melletti befogó és az átfogó hányadosa,
- $\mathrm{tg}\alpha$ az α szöggel szemközti befogó és az α szög melletti befogó hányadosa,
- $\mathrm{ctg}\alpha$ az α szög melletti befogó és az α szöggel szemközti befogó hányadosa.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b},\quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$



TÉTEL: **Szinusztétel**: Egy háromszögben két oldal hosszának aránya egyenlő a velük szemközti szögek szinuszának arányával:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

A szinusztétel a háromszög három oldalára is felírható, ekkor $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

Szinusztétel alkalmazása:

- Ha adott a háromszög egy oldala és két szöge, akkor bármely oldal kiszámolható (mert ekkor kiszámolható a belső szögösszegből a harmadik szög).
- Ha adott a háromszög két oldala és nem az általuk közbezárt szög ismert, akkor két eset lehetségséges:
  - Ha a két oldal közül a nagyobbikkal szemköztes szög ismert, akkor kiszámolható a kisebbik oldallal szemköztes szög. Ebben az esetben a háromszög egyértelműen meghatározott.
  - Ha a háromszög két oldalát és a rövidebbel szemköztes szöget ismerjük, akkor kiszámolható a nagyobbik oldallal szemköztes szög, amire háromféle megoldás is lehet:
    1. ha a szög szinuszára pozitív, de 1-nél kisebb értéket kapunk, akkor két megoldás van, a szög lehet hegyesszög és tompaszög is. Ekkor a háromszög nem egyértelműen meghatározott, két ilyen háromszög létezik.

2. ha a szög szinuszára 1-et apunk, akkor egy megoldás van, a szög 90º, ez egy derékszögű háromszög.
3. ha a szög szinuszára 1-nél nagyobb számot kapunk, akkor nincs ilyen szög, azaz nincs az adatoknak megfelelő háromszög.

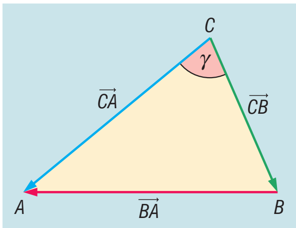
Ebben az esetben inkább a koszinusz tételt alkalmazzuk, ekkor másodfokú egyenletet kapunk a harmadik oldalra, így viszont egyértelműen eldönthető az oldal hossza (a másodfokú egyenletnek 0, 1, 2 megoldása van, illetve feltétel, hogy az oldal hossza pozitív, vagy a háromszög-egyenlőtlenség is segíthet abban, hogy eldöntsük, hogy melyik eredmény megoldása a feladatnak).

TÉTEL: Koszinusztétel: egy háromszög egyik oldalhosszának négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetösszegéből kivonjuk a két oldal hosszának és a közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

BIZONYÍTÁS: Vektorok skaláris szorzatának felhasználásával fogjuk bizonyítani, ezért a háromszög oldalait irányítjuk:

$$\overrightarrow{CB} = \underline{a}\,,\quad \overrightarrow{CA} = \underline{b}\,,\quad \overrightarrow{BA} = \underline{c}\,.$$

Jelölje $|\underline{a}| = a$, $|\underline{b}| = b$ és $|\underline{c}| = c$.



Ekkor $\underline{c} = \underline{a} - \underline{b}$. Az egyenlet mindkét oldalát önmagával skalárisan szorozva:

$$\underline{c}^2 = (\underline{a} - \underline{b})^2 \;\Rightarrow\; \underline{c}^2 = \underline{a}^2 - 2\underline{a}\underline{b} + \underline{b}^2\,.$$

$$\underline{c}^2 = |\underline{c}|\cdot|\underline{c}|\cdot\cos 0^\circ = c\cdot c\cdot 1 = c^2\,.$$

Hasonlóan $\underline{a}^2 = a^2$ és $\underline{b}^2 = b^2$.

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\gamma = a\cdot b\cdot\cos\gamma\,.$$

Ezeket beírva a $\underline{c}^2 = \underline{a}^2 - 2\underline{a}\underline{b} + \underline{b}^2$ egyenletbe kapjuk: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.□

Következmények:

- ha $\gamma = 90^\circ$, vagyis a háromszög derékszögű, akkor $c^2 = a^2 + b^2$, ami a Pitagorasz-tétel.
- ha $\gamma < 90^\circ$, akkor bármely két oldalának négyzetösszege nagyobb a harmadik oldal négyzeténél.
- ha $\gamma > 90^\circ$, akkor a két rövidebb oldal négyzetösszege kisebb a harmadik oldal négyzeténél.

Koszinusztétel alkalmazása:

- Ha adott a háromszög két oldala és az általuk közbezárt szög, akkor kiszámítható a szöggel szembeni oldal.
- Ha adott a háromszög három oldala, akkor kiszámolható a háromszög bármely szöge.
  Ha keressük a háromszög szögeit, akkor ebben az esetben a háromszög legnagyobb szögét érdemes kiszámolni koszinusztétellel, ami a leghosszabb oldallal szemben van, mert az hegyes-, derék- és tompaszögre is egyértelmű megoldást ad.

V. Alkalmazások:

- Háromszögek szerkesztése, háromszög ismeretlen adatainak kiszámítása.
- Sokszögekben oldalak, átlók, szögek kiszámolása háromszögekre bontással.
- Földmérésben, térképészetben, csillagászatban mért adatokból távolságok és szögek kiszámolása.
- Terepfeladatok megoldásánál: pl.: megközelíthetetlen pontok helyének meghatározása.
- Modern helymeghatározás: GPS.

Matematikatörténeti vonatkozások:

- **Thalész** a Kr.e. VI. században élt az ókori Görögországban, az első olyan matematikus volt, akinek bizonyítási igénye volt. Ő mondta ki, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180º, megállapította, hogy egyenlő szárú háromszögben az egyenlő hosszúságú oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak.
- A szinusztétel felfedezője **Abu Nasr** (1000 körül) arab matematikus.
- **Regiomontanus** (1436–1476) német matematikus részletes trigonometriai bevezetést írt a háromszögekről. Készített szinusztáblázatot is. A nagy humanista Vitéz János barátjaként éveket töltött Esztergomban, majd Mátyás király udvarában a Corvina könyvtár rendezésével foglalatoskodott.
- A legrégibb térképeket több, mint 4000 évvel ezelőtt készítették. **Snellius** holland mérnök a 17. században kidolgozott olyan, a háromszögek adatainak meghatározására épülő (trigonometriai) módszert, amelynek alkalmazásával a térképek pontosabbá váltak.

15. Egybevágóság és hasonlóság. A hasonlóság alkalmazásai geometriai tételek bizonyításában.

Vázlat:

I. Egybevágósági transzformációk
Eltolás, tengelyes tükrözés, pontra vonatkozó tükrözés, pont körüli elforgatás
II. Alakzatok egybevágósága (háromszögek, sokszögek)
III. Hasonlósági transzformáció:
Középpontos hasonlósági transzformáció
IV. Alakzatok hasonlósága (háromszögek, sokszögek)
V. Transzformációk tulajdonságai
VI. Hasonlóság alkalmazása háromszögekre vonatkozó tételekben
a) középvonalra vonatkozó tétel
b) súlyvonalakra vonatkozó tétel
c) szögfelezőtétel
d) magasságtétel
e) befogótétel
VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

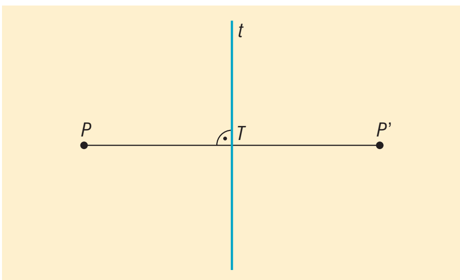
Kidolgozás:

I. Transzformációk:

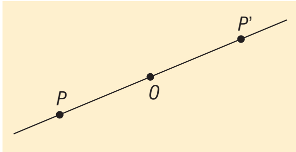
DEFINÍCIÓ: Geometriai transzformációk azok a függvények, amelyek egy ponthalmazt ponthalmazra képeznek le. ($D_f = R_f =$ ponthalmaz)

DEFINÍCIÓ: A geometriai transzformációk közül a távolságtartó transzformációkat **egybevágósági transzformáció**knak nevezzük.
Távolságtartó leképezés: bármely két pont távolsága egyenlő képeik távolságával.
Síkbeli egybevágósági transzformációk: tengelyes tükrözés, pontra vonatkozó (középpontos) tükrözés, pont körüli elforgatás, eltolás.

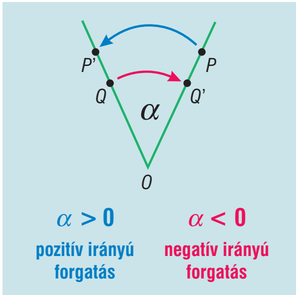
DEFINÍCIÓ: Tengelyes tükrözés: adott a sík egy t egyenese, ez a tengelyes tükrözés tengelye. A t tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés a sík tetszőleges t-re nem illeszkedő P pontjához azt a P' pontot rendeli, amelyre fennáll, hogy a PP' szakasz felezőmerőlegese a t tengely. A t egyenes képe önmaga.



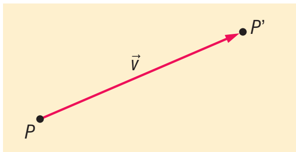
DEFINÍCIÓ: Középpontos tükrözés: adott a sík egy O pontja, a középpontos tükrözés középpontja. Az O pontra vonatkozó középpontos tükrözés a sík egy tetszőleges O-tól különböző P pontjához azt a P' pontot rendeli, amelyre az O pont a PP' szakasz felezőpontja. Az O pont képe önmaga.



DEFINÍCIÓ: Pont körüli forgatás: adott a sík egy O pontja és egy α irányított szög. Az O pont körüli α szögű, adott irányú forgatás a sík egy tetszőleges O-tól különböző P pontjához azt a P' pontot rendeli, amelyre teljesül, hogy POP' szög irány és nagyság szerint megegyezik α-val és $OP = OP'$. O pont képe önmaga.



DEFINÍCIÓ: Eltolás: adott egy $\underline{v}$ vektor. A $\underline{v}$ vektorral való eltolás a sík (tér) tetszőleges P pontjához azt a P' pontot rendeli, amelyre $\overrightarrow{PP'} = \underline{v}$.



II. Alakzatok egybevágósága (háromszögek, sokszögek)

DEFINÍCIÓ: Két alakzat egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi. Jele: $A \cong B$.

TÉTEL: Két háromszög akkor és csak akkor egybevágó, ha:
- megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlő,
- két-két oldaluk hossza páronként egyenlő és az ezek által közbezárt szögek nagysága egyenlő,
- két-két oldaluk hossza páronként egyenlő és e két-két oldal közül a hosszabbikkal szemközti szögük nagysága egyenlő,
- egy-egy oldaluk hossza páronként egyenlő és két-két szögük páronként egyenlő.

TÉTEL: Két sokszög akkor és csak akkor egybevágó, ha a következő feltételek egyike teljesül:
- megfelelő oldalaik hossza és a megfelelő átlóik hossza páronként egyenlő,
- megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlő és megfelelő szögeik páronként egyenlők.

III. Hasonlósági transzformáció: középpontos hasonlóság

DEFINÍCIÓ: Középpontos hasonlósági transzformáció: adott egy O pont és egy λ 0-tól különböző valós szám. A tér minden P pontjához rendeljünk hozzá egy P' pontot a következőképpen:
1. ha $P = O$, akkor $P' = P$.
2. ha $P \neq O$, akkor P' az OP egyenes azon pontja, amelyre $OP' = |\lambda| \cdot OP$ és ha $\lambda > 0$, akkor P' az OP félegyenes pontja, ha $\lambda < 0$, akkor O elválasztja egymástól P-t és P'-t.

Az O pont a középpontos **hasonlósági transzformáció középpontja**, λ a középpontos **hasonlóság aránya**.
Ha $|\lambda| > 1$, akkor középpontos **nagyítás**ról, ha $|\lambda| < 1$, akkor **kicsinyítés**ről beszélünk, ha pedig $|\lambda| = 1$, akkor a transzformáció egybevágóság.

DEFINÍCIÓ: Véges sok középpontos hasonlósági transzformáció és véges sok egybevágósági transzformáció egymás utáni végrehajtásával kapott transzformációkat **hasonlósági transzformáció**nak nevezzük.

IV. Alakzatok hasonlósága (háromszögek, sokszögek)

DEFINÍCIÓ: Két alakzat hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi. Jele: $A \sim B$.

TÉTEL: Két háromszög akkor és csak akkor hasonló, ha:

1. megfelelő oldalaik hosszának aránya páronként egyenlő, azaz $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \lambda$,
2. két-két oldalhosszuk aránya és az ezek által közbezárt szögek nagysága egyenlő, pl.: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \lambda$ és $\gamma = \gamma'$,
3. két-két oldalhosszuk aránya egyenlő, és e két-két oldal közül a hosszabbikkal szemközti szögük nagysága egyenlő, pl.: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \lambda$ és $\alpha = \alpha'$ (ha $a > b$),
4. két-két szögük páronként egyenlő, pl.: $\alpha = \alpha'$ és $\beta = \beta'$.

TÉTEL: Két sokszög akkor és csak akkor hasonló, ha megfelelő oldalhosszaik aránya és megfelelő szögeik nagysága páronként egyenlő nagyságú.

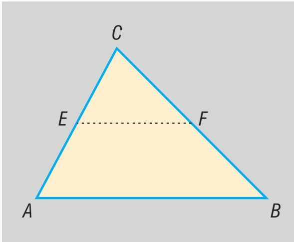
V. Transzformációk főbb tulajdonságai:

	Egybevágósági transzformációk				**Hasonlóság: középpontos hasonlósági transzformáció**
	tengelyes tükrözés	**középpontos tükrözés**	**pont körüli elforgatás**	**eltolás**	
fixpont (képe önmaga)	a t egyenes minden pontja	egyetlen fixpont: O pont	egyetlen fixpont: O pont (ha $\alpha \neq 0°$)	nincs fixpontja (ha $\underline{v} \neq \underline{0}$)	egyetlen fixpont: O pont (ha $\lambda \neq 1$)
fixegyenes (minden pontja fixpont)	a t egyenes	nincs fixegyenes	nincs fix egyenes (ha $\alpha \neq 0°$)	nincs fixegyenes	nincs fixegyenes (ha $\lambda \neq 1$)
invariáns egyenes (képe önmaga, de pontonként nem fix)	a t-re merőleges egyenesek	minden O-ra illeszkedő egyenes invariáns	nincs invariáns egyenes (ha $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 180°$)	az adott vektorral párhuzamos egyenesek	minden O-ra illeszkedő egyenes invariáns (ha $\lambda \neq 1$)

VI. Hasonlóság alkalmazása háromszögekre vonatkozó tételekben

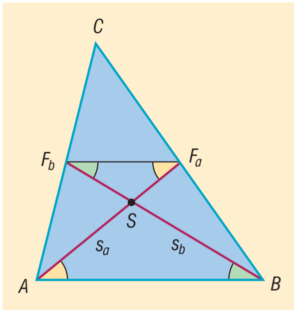
TÉTEL: A háromszög középvonalaira vonatkozó tétel: A háromszög középvonala párhuzamos a felezőpontokat nem tartalmazó oldalakkal, és fele olyan hosszú, mint a nem felezett oldal.

BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál az *ABC* és *EFC* háromszögek hasonlóságát használjuk.



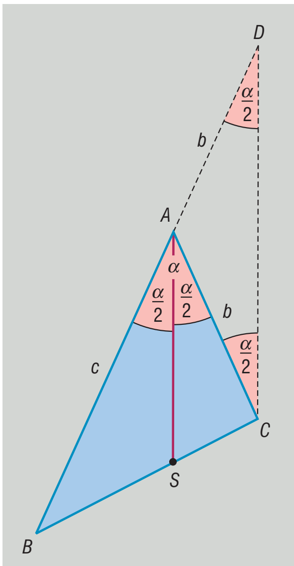
TÉTEL: A háromszög súlyvonalaira vonatkozó tétel: A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont mindhárom súlyvonalnak a csúcstól távolabbi harmadolópontja.

BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál az *ASB* és SF_aF_b háromszögek hasonlóságát használjuk.



TÉTEL: Szögfelezőtétel: Egy háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.

BIZONYÍTÁS: Az *ABC* háromszög *A* csúcsából induló belső szögfelező *BC* oldalt az *S* pontban metszi.



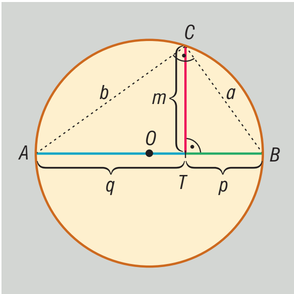
A *BA* szakaszt hosszabbítsuk meg *A*-n túl és legyen $AD = b$. Ekkor $AD = AC = b$, ebből következik, hogy az *ACD* háromszög egyenlő szárú, a *C*-nél és a *D*-nél levő belső szögek egyenlők, az *A*-nál levő külső szög α.
Tudjuk, hogy a háromszög külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos belső szögek összegével, tehát $ACD\sphericalangle = ADC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

Ekkor viszont $BAS\sphericalangle = ADC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. Ebből következik, hogy az $AS \parallel CD$. A B csúcsnál levő szögre alkalmazva a párhuzamos szelők tételét kapjuk: $\frac{CS}{SB} = \frac{DA}{AB} = \frac{AC}{AB}$. □

TÉTEL: Magasságtétel: Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyekre a magasság az átfogót osztja.

BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál a TBC és TAC háromszögek hasonlóságát használjuk.

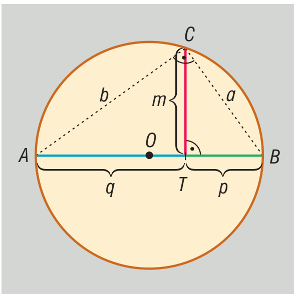
$$\frac{m}{p} = \frac{q}{m} \Rightarrow m^2 = p \cdot q \Rightarrow m = \sqrt{p \cdot q} \ \square$$



TÉTEL: Befogótétel: Derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának.

BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál a TBC és az ABC háromszögek hasonlóságát használjuk.

$$\frac{a}{p} = \frac{c}{a} \Rightarrow a^2 = p \cdot c \Rightarrow a = \sqrt{p \cdot c} \ \square$$



VII. Alkalmazások:

- A kör kerületének és területének meghatározását végezhetjük a körbe, illetve a kör köré írt szabályos sokszögek kerületének, illetve területének segítségével. Ez egyben π értékének közelítése.
- Aranymetszés aránya = szabályos ötszög átlóinak osztásaránya
- Hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése derékszögű háromszögek hasonlóságán alapul.
- Hasonlóságot használnak a térképészetben, az építészetben (tervek, makettek), az optikai lencsék alkalmazásakor.
- Szakasz egyenlő részekre osztása párhuzamos szelők tételének segítségével történik.

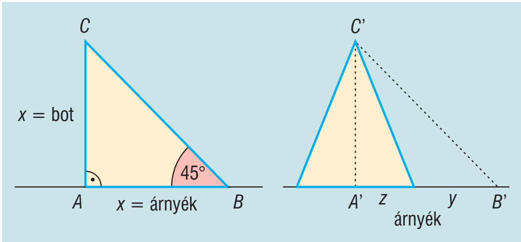
Matematikatörténeti vonatkozások:

- **Euklidesz** Kr.e. 300 körül élt görög matematikus Elemek című művében meghatározta a geometriai alapszekesztések axiómáit, egybevágósággal és hasonlósággal kapcsolatos tételeket. Pl. hasonló körszeletek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint húrjaik négyzetei.

- **Thalész** Kr.e. VI. században élt az ókori Görögországban, kiszámolta az egyiptomi piramisok magasságát a hasonlóság segítségével:
  Egy földbe szúrt bot segítségével mérte a piramisok magasságát: amikor a bot és az árnyéka egyenlő hosszú, akkor a piramis árnyéka is egyenlő a piramis magasságával, így elegendő csak a piramis árnyékát és alapját megmérni, mert ezekből már számolható a piramis magassága:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} = 1$$

$$A'B' = A'C' = y + z$$



- Az egybevágóság jelét (≅) **Leibniz** (1646–1716) német matematikus vezette be.

16. A kör és részei. Kerületi szög, középponti szög, látószög. Húrnégyszögek, érintőnégyszögek.

Vázlat:

I. Kör és részei (kör, körlap, körcikk, körgyűrű, körgyűrűcikk, körszelet)
II. Kerületi, középponti szög, látószög, látókörív, kerületi és középponti szögek tétele, radián
III. Húrnégyszög: definíció, tétel, terület (Heron-képlet)
IV. Érintőnégyszög: definíció, tétel, terület
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

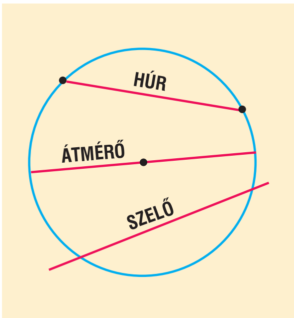
Kidolgozás

I. Kör és részei

DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon amelyeknek a sík egy adott O pontjától adott r távolságra (adott r távolságnál nem nagyobb / adott r távolságnál kisebb) vannak O középpontú, r sugarú **kör**nek (**zárt körlap**nak / **nyílt körlap**nak) nevezzük.
A kör területe $t = r^2\pi$, kerülete $k = 2r\pi$.

DEFINÍCIÓ: A körvonal két különböző pontját összekötő szakaszt **húr**nak nevezzük

DEFINÍCIÓ: A húr egyenesét **szelő**nek, a középponton áthaladó húrt **átmérő**nek nevezzük. Az átmérő a kör leghosszabb húrja, hossza: $2r$.



TÉTEL: A kör
– középpontján áthaladó tetszőleges egyenesre nézve tengelyesen szimmetrikus
– középpontjára nézve középpontosan szimmetrikus
– középpontja körüli forgatásra forgatásszimmetrikus

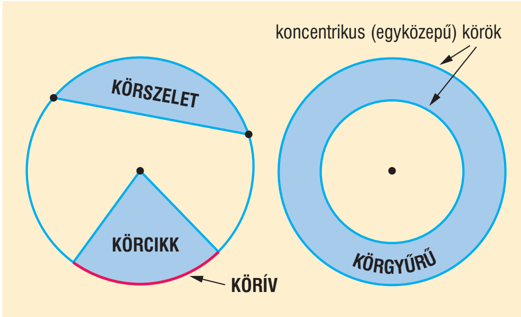
DEFINÍCIÓ: A körlapnak két sugár közé eső darabja a **körcikk.**

DEFINÍCIÓ: Egy szelő által a körlapból lemetszett rész a **körszelet.**

DEFINÍCIÓ: Két kör **koncentrikus**, ha középpontjaik egybeesnek.

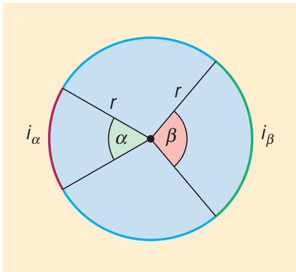
DEFINÍCIÓ: Két koncentrikus körvonal közé eső rész a **körgyűrű**.

DEFINÍCIÓ: Ha egy szög csúcsa a kör középpontja akkor a szöget **középponti szög**nek nevezzük.



TÉTEL: Egy adott körben két középponti szöghöz tartozó **ívek hosszának aránya**, valamint a **körcikkek területének aránya** megegyezik a középpont szögek arányával.

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{i_\alpha}{i_\beta}=\frac{t_\alpha}{t_\beta}$$



TÉTEL: Egy körben α középponti szögű **körcikk területe**:

$$\frac{t_\alpha}{r^2\pi}=\frac{\alpha^\circ}{360^\circ}\Rightarrow t_\alpha=\frac{r^2\pi}{360^\circ}\cdot\alpha^\circ,\ \text{illetve}\ \frac{t_\alpha}{r^2\pi}=\frac{\widehat{\alpha}}{2\pi}\Rightarrow t_\alpha=\frac{r^2\widehat{\alpha}}{2},$$

a hozzátartozó **ív hossza**:

$$\frac{i_\alpha}{2r\pi}=\frac{\alpha^\circ}{360^\circ}\Rightarrow i_\alpha=\frac{2r\pi}{360^\circ}\cdot\alpha^\circ,\ \text{illetve}\ \frac{i_\alpha}{2r\pi}=\frac{\widehat{\alpha}}{2\pi}\Rightarrow t_\alpha=r\widehat{\alpha}.$$

TÉTEL: Egy körben α középponti szögű **körcikk területe az ívhosszal** kifejezve: $t_\alpha=\frac{r\cdot i_\alpha}{2}$.

TÉTEL: R és r határoló **körgyűrű területe** $t=R^2\pi-r^2\pi$.

TÉTEL: Körszelet területe: $t=\frac{r^2\widehat{\alpha}}{2}-\frac{r^2\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{r^2}{2}(\widehat{\alpha}-\sin\alpha)$.

II. Középponti és kerületi szögek

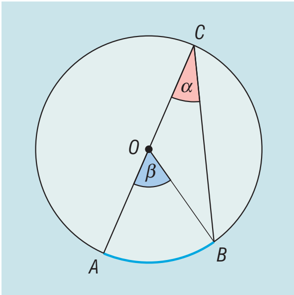
DEFINÍCIÓ: Ha egy szög csúcsa egy adott kör középpontja, akkor a szöget **középponti szög**nek nevezzük, a szög szárai két sugárra illeszkednek.

DEFINÍCIÓ: Ha egy szög csúcsa egy adott körvonal egy pontja, szárai a kör húrjai, akkor a szöget **kerületi szög**nek nevezzük.
Speciális: **érintőszárú kerületi szög**: egyik szára a kör húrja, másik szára a kör érintője a húr egyik végpontjában.
A középponti szögek kapcsolatát egy körön belül már tárgyaltuk.

TÉTEL: Középponti és kerületi szögek tétele: Adott körben adott ívhez tartozó bármely kerületi szög nagysága fele az ugyanazon ívhez tartozó középponti szög nagyságának.

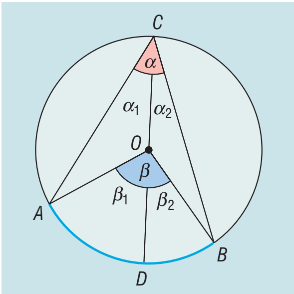
BIZONYÍTÁS: a középponti és a kerületi szögek helyzetének 4 esete van:

1. A középponti és a kerületi szög egy szára egy egyenesbe esik.



BOC háromszög egyenlő szárú $OB = OC = r \;\Rightarrow\; OCB\sphericalangle = CBO\sphericalangle = \alpha \;\Rightarrow\; \beta = OBC$ háromszög külső szöge, ami egyenlő a nem mellette lévő két belső szög összegével $\beta = 2\alpha$ $\Rightarrow\; \alpha = \dfrac{\beta}{2}$. □

2. A középponti szög csúcsa a kerületi szög belsejébe esik: Húzzuk be az OC-re illeszkedő átmérőt, mely az α szöget α_1 és α_2, β szöget β_1 és β_2 részekre osztja.

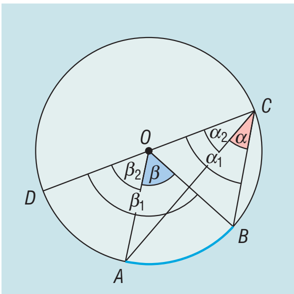


A BD, illetve AD ívekhez tartozó kerületi és középponti szögek elhelyezkedése az 1. esetnek megfelelő, tehát $\beta_1 = 2\alpha_1$ és $\beta_2 = 2\alpha_2$. Ebből következik, hogy

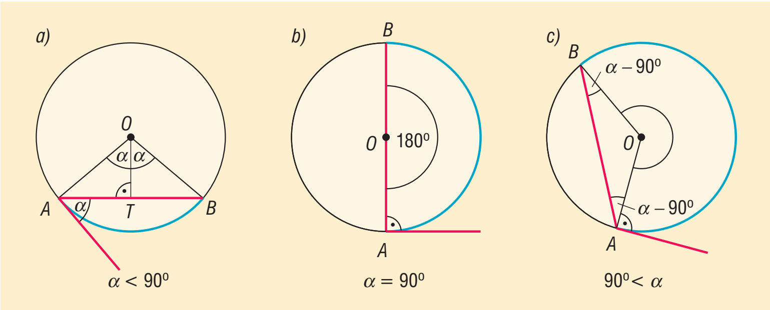
$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\beta}{2}. \square$$

3. A középponti szög csúcsa a kerületi szög szögtartományán kívül esik: Húzzuk be az OC-re illeszkedő átmérőt. Az $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ és $\beta = \beta_1 - \beta_2$ összefüggések írhatók fel a DB és a DA ívekhez tartozó kerületi és középponti szögek elhelyezkedésére az 1. esetnek megfelelő, tehát $\beta_1 = 2\alpha_1$ és $\beta_2 = 2\alpha_2$. Ebből következik, hogy

$$\beta = \beta_1 - \beta_2 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\beta}{2}. \square$$



4. Ha a kerületi szög érintőszárú, akkor 3 eset van:
Jelölje α az AB íven nyugvó érintőszárú kerületi szög.



a) $0° < \alpha < 90°$. Ekkor

$$BAO\sphericalangle = ABO\sphericalangle = 90° - \alpha \Rightarrow AOB\sphericalangle = 2\alpha = \beta \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}. \square$$

b) $\alpha = 90° \Rightarrow \beta = 180° \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}. \square$

c) $90° < \alpha < 180°$. Ekkor

$$BAO\sphericalangle = ABO\sphericalangle = \alpha - 90° \Rightarrow AOB\sphericalangle = 180° - 2(\alpha - 90°) = 360° - 2\alpha \Rightarrow$$

$$\beta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}. \square$$

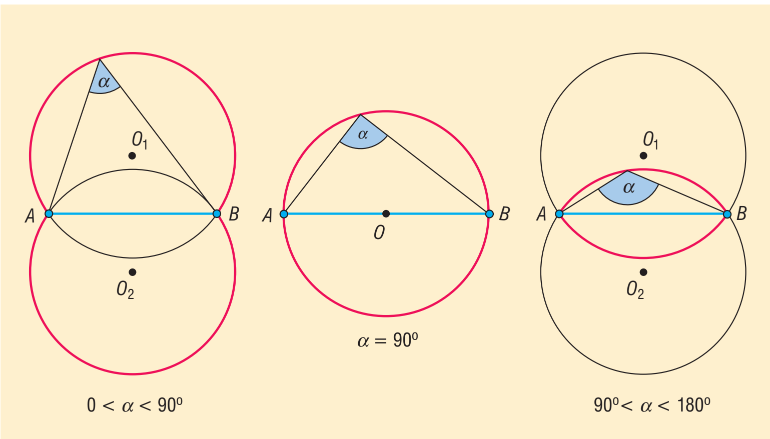
TÉTEL: Kerületi szögek tétele: adott kör adott ívéhet tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak vagy adott kör adott AB húrja az AB ív belső pontjaiból ugyanakkora szögben látszik.

TÉTEL: Általánosan: egyenlő sugarú körökben az azonos hosszúságú ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.

TÉTEL: Ebből megfogalmazható **Thalész tétele és annak megfordítása**: Azon pontok halmaza síkon, amelyekből a sík egy AB szakasza derékszögben látszik, az AB átmérőjű körvonal, kivéve az A és a B pontokat.

DEFINÍCIÓ: Tekintsünk a síkon egy AB szakaszt és egy P pontot. Legyen $APB\sphericalangle = \alpha$. Ekkor azt mondhatjuk, hogy a P pontból az AB szakasz α szög alatt látszik. Az α szöget **látószögnek** nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Azon pontok halmaza amelyekből a sík egy AB szakasza adott α ($0° < \alpha < 180°$) szög alatt látszik, két, az AB egyenesre szimmetrikusan elhelyezhető körív, melynek neve az AB szakasz α szögű **látókörív**e. A szakasz két végpontja nem tartozik a ponthalmazba.

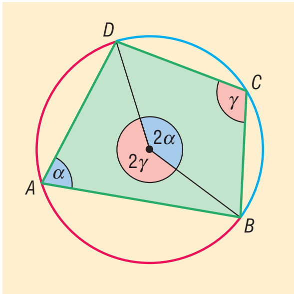


III. Húrnégyszög

DEFINÍCIÓ: Azokat a négyszögeket, amelyeknek van köré írható körük, **húrnégyszög**eknek nevezzük. Ezzel ekvivalens: a húrnégyszög olyan négyszög, amelynek oldalai ugyanannak a körnek a húrjai.

TÉTEL: Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor szemközti szögeinek összege 180º.

BIZONYÍTÁS: Vegyük fel egy $ABCD$ húrnégyszöget, és a köré írt kört. Legyen a négyszögben $DAB\sphericalangle = \alpha$, $BCD\sphericalangle = \gamma$.



Ekkor α a C csúcsot tartalmazó BD ívhez, γ pedig az A csúcsot tartalmazó DB ívhez tartozó kerületi szög. A kerületi és középponti szögek tételéből következően az ugyanezeken az ívekhez tartozó középponti szögek nagysága 2α, illetve 2γ.

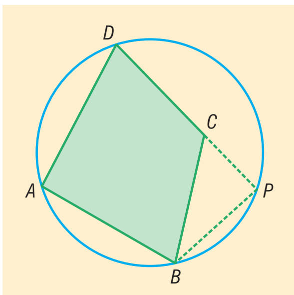
Ezek összegéről tudjuk, hogy $2\alpha + 2\gamma = 360º$. Mivel a négyszög belső szögeinek összege 360º, ezért a másik két szemközti szög összege is 180º.□

TÉTEL: Ha egy négyszög szemközti szögeinek összege 180º, akkor az húrnégyszög.

BIZONYÍTÁS: indirekt

Tegyük fel, hogy a szemközti szögeinek összege 180°, és a négyszög nem húrnégyszög. Tehát az egyik csúcs (C) nem illeszkedik a másik három által meghatározott körre. Legyen P a DC egyenesének és a körnek metszéspontja.

Legyen $DAB\sphericalangle = \alpha$, a feltétel szerint $BCD\sphericalangle = 180º - \alpha \Rightarrow BCP\sphericalangle = \alpha$.



Ekkor $ABPD$ négyszög húrnégyszög, amiről már beláttuk, hogy szemközti szögeinek összege 180º, tehát $DPB\sphericalangle = 180º - \alpha$. Ebből viszont az következik, hogy a BPC háromszög egyik szöge ($BCP\sphericalangle$) α, egy másik ($BPC\sphericalangle$) pedig $180º - \alpha$. Ezek összege a harmadik szög nélkül is 180º, ami ellentmond a belső szögek összegére vonatkozó tételnek. Mivel helyesen következtettünk, csak a kiindulási feltételben lehet a hiba, tehát nem igaz, hogy C nincs a körön $\Rightarrow$ C illeszkedik a körre. Ez viszont azt jelenti, hogy $ABCD$ mindegyik csúcsa ugyanazon körön van $\Rightarrow$ $ABCD$ húrnégyszög. □

TÉTEL: Húrnégyszög-tétel: egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180º.

TÉTEL: A **nevezetes négyszögek** közül biztosan húrnégyszög a szimmetrikus trapéz (húrtrapéz), a téglalap és a négyzet.

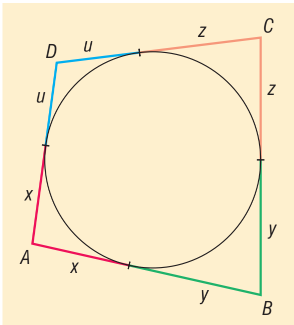
TÉTEL: A paralelogramma akkor és csak akkor húrnégyszög, ha téglalap.

TÉTEL: A **húrnégyszög területe** kifejezhető a négyszög kerületével és az oldalakkal: Ha $s=\frac{k}{2}$, akkor $t=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. Ez a **Heron-képlet** húrnégyszögekre.

IV. Érintőnégyszög

DEFINÍCIÓ: Azokat a négyszögeket, amelyeknek van beírt körük, **érintőnégyszögek**nek nevezzük. Ezzel ekvivalens: az érintő négyszög olyan négyszög, amelynek az oldalai ugyanannak a körnek érintői.

TÉTEL: Ha egy konvex négyszög érintőnégyszög, akkor szemközti oldalainak összege egyenlő.



TÉTEL: Ha egy konvex négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, akkor az érintőnégyszög.

TÉTEL: **Érintőnégyszög tétel**: Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha szemközti oldalainak összege egyenlő.

TÉTEL: A **nevezetes négyszögek** közül biztosan érintőnégyszög a deltoid, így a rombusz és a négyzet.

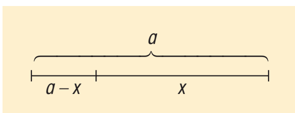
TÉTEL: A paralelogramma akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha rombusz.

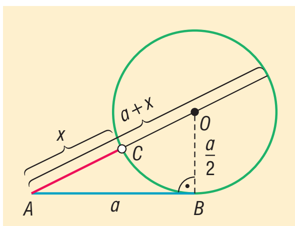
TÉTEL: **Érintőnégyszög területe** kifejezhető a négyszög kerületével, és a beírt kör sugarával:

$$t=\frac{k\cdot r}{2}=s\cdot r\,.$$

V. Alkalmazások:

- Körhöz húzott érintő és szelőszakaszok tételével egy szakaszt aranymetszésnek megfelelően (a nagyobb rész és az egésznek az aránya egyenlő a kisebb rész és a nagyobb rész arányával) feloszthatunk.





- Körrel kapcsolatos ismeretek: Körmozgás, forgómozgás, építészet (boltívek, román és gótikus stílusú ablakok tervezése)

- Látószög: háromszög szerkesztésében (pl.: adott a, α, m_a esetén háromszög szerkesztése), terepfeladatokban, csillagászatban, színházi nézőtéren a legjobb ülőhely kiválasztása, labdarúgásban és kézilabdában a legjobb szögből való kapuralövés helyének meghatározása
- A kör területe, kerülete: térgeometriai számítások
- Csonkakúp, illetve csonkagúla beírt gömbjének sugár meghatározása megfelelő síkmetszettel (pl. érintőtrapéz)
- Csonkakúp körülírt gömbjének sugár meghatározása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A kör és részei közötti viszonyok feltárását már az ókori gondolkodóknál megtalálhatjuk. Számukra a kör a tökéletességet szimbolizálta, isteni eredetűnek tartották. Ma a matematika számos területe támaszkodik az idők folyamán felfedezett összefüggésekre.
- **Euklidesz** Kr.e 300 körül élt görög matematikus Elemek című művében meghatározta a geometriai alapszekesztések axiómáit, a kerületi és a középponti szögekkel kapcsolatos tételeket, a hasonlósággal kapcsolatos tételeket. Pl. hasonló körszeletek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint húrjaik négyzetei.
- **Heron** Kr.e. I. században élt görög matematikus, síkidomok területének és testek térfogatának kiszámításával is foglalkozott. A háromszög területét számító Heron-képlet, amelynek geometriai bizonyítását adta, valószínűleg Arkhimédész felfedezése.
- **Leonardo da Vinci** (1452–1519) olasz festő, matematikus számos festményében használta az aranymetszést, pl az egyik leghíresebb festményében, a Mona Lisa-ban több, mint száz aranymetszéses arány található.

17. Vektorok, vektorműveletek. Vektorfelbontási tétel. Vektorok koordinátái. Skaláris szorzat.

Vázlat:

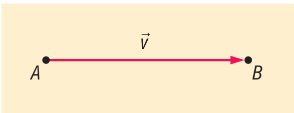
I. Vektor, vektor hossza, vektorok egyenlősége, párhuzamossága
II. Vektorműveletek, tulajdonságaik
III. Vektorok felbontása
IV. Vektorok koordinátái
V. Skaláris szorzat
VI. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Vektor

Az eltolás, mint egybevágósági transzformáció megadható az eltolás irányával és nagyságával, vagyis egy vektorral.

Az irányított szakaszt **vektor**nak nevezzük. Jel: $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, A: kezdőpont, B: végpont (ez szemléletes megoldás, a vektor alapfogalom, nem definiáljuk).

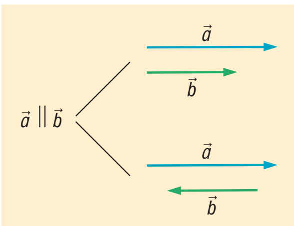


DEFINÍCIÓ: A **vektor abszolút értéke** a vektort meghatározó irányított szakasz hossza. Jele: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

DEFINÍCIÓ: Az a vektor amelynek abszolút értéke nulla, **nullvektor**. Jele: $\underline{0}$. A nullvektor iránya tetszőleges, tehát minden vektorra merőleges, és minden vektorral párhuzamos.

DEFINÍCIÓ: Két vektor **egyirányú**, ha a két vektor párhuzamos, és azonos irányba mutat.

DEFINÍCIÓ: Két vektor **ellentétes irányú,** ha a két vektor párhuzamos, de ellentétes irányba mutat.



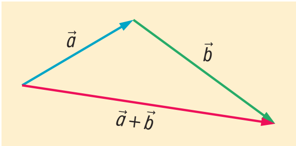
DEFINÍCIÓ: Két vektor egyenlő, ha egyirányúak és abszolút értékük egyenlő.

DEFINÍCIÓ: Két vektor egymás **ellentett**je, ha ellentétes irányúak és abszolút értékük egyenlő.

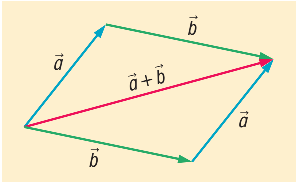
II. Vektorműveletek

DEFINÍCIÓ: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ **vektorok összege** annak az eltolásnak a vektora, amellyel helyettesíthető az $\underline{a}$ vektorral és a $\underline{b}$ vektorral történő egymásutánja. Jele: $\underline{a} + \underline{b}$.

háromszög-szabály



paralelogramma-szabály

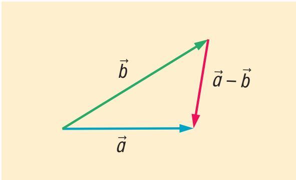


Ellentett vektorok összege a nullvektor: $\underline{a}+(-\underline{a})=\underline{0}$.

Vektorösszeadás tulajdonságai:

1. **kommutatív**: $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$ (összeg nem függ az összeadandók sorrendjétől).
2. **asszociatív**: $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$ (az összeg független az összeadandók csoportosításától).

DEFINÍCIÓ: Az $\underline{a}-\underline{b}$ **különbségvektor** az a vektor, amelyhez a $\underline{b}$ vektort adva az $\underline{a}$ vektort kapjuk. Jele: $\underline{a}-\underline{b}$.



Az $\underline{a}-\underline{b}$ és a $\underline{b}-\underline{a}$ egymás ellentettjei.

DEFINÍCIÓ: Egy nullvektortól különböző $\underline{a}$ vektor tetszőleges λ valós számmal (**skalárral**) **vett szorzata** egy olyan vektor, amelynek abszolút értéke $|\lambda|\cdot|\underline{a}|$ és $\lambda>0$ esetén $\underline{a}$-val egyirányú, $\lambda<0$ esetén $\underline{a}$-val ellentétes irányú.
A nullvektort bármilyen valós számmal szorozva nullvektort kapunk.

Skalárral vett szorzás tulajdonságai:

1. **disztributív:** $\begin{cases}\alpha\cdot\underline{a}+\beta\cdot\underline{a}=(\alpha+\beta)\cdot\underline{a}\\ \alpha\cdot\underline{a}+\alpha\cdot\underline{b}=\alpha\cdot(\underline{a}+\underline{b})\end{cases}$
2. **asszociatív:** $\alpha\cdot(\beta\cdot\underline{a})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\underline{a}$

III. Vektorok felbontása

DEFINÍCIÓ: Tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorokkal és α, β valós számokkal képzett $\underline{v}=\alpha\cdot\underline{a}+\beta\cdot\underline{b}$ vektort az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok **lineáris kombináció**jának nevezzük.

TÉTEL: Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nullvektortól különböző párhuzamos vektorok, akkor pontosan egy olyan α valós szám létezik, amelyre $\underline{b}=\alpha\cdot\underline{a}$.

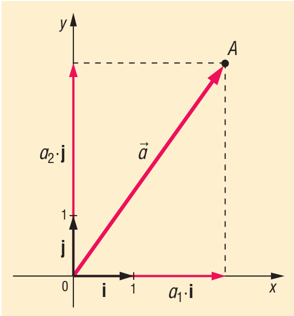
TÉTEL: Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nullvektortól különböző, nem párhuzamos vektorok, akkor a velük egy síkban levő minden $\underline{c}$ vektor egyértelműen előáll $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\underline{c}=\alpha\cdot\underline{a}+\beta\cdot\underline{b}$ alakban, ahol α és β egyértelműen meghatározott valós számok. Ez azt jelenti, hogy $\underline{c}$ egyértelműen felbontható $\underline{a}$**-val és** $\underline{b}$**-vel párhuzamos összetevők**re.

DEFINÍCIÓ: A lineáris kombinációban szereplő $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokat **bázisvektorok**nak nevezzük.

IV. Vektorok koordinátái

DEFINÍCIÓ: A síkbeli derékszögű $(x; y)$ koordináta-rendszer **bázisvektorai** az origóból az (1; 0) pontba mutató $\underline{i}$ és a (0; 1) pontba mutató $\underline{j}$ **egységvektorok**.

DEFINÍCIÓ: A derékszögű koordináta-rendszerben az $A(a_1, a_2)$ pont **helyvektor**a az origóból az A pontba mutató vektor.



DEFINÍCIÓ: A derékszögű koordináta-rendszerben egy **vektor koordinátái**nak nevezzük az origó kezdőpontú, vele egyenlő helyvektor végpontjának koordinátáit. Jele: $\underline{a}(a_1, a_2)$.

TÉTEL: (Az előbbiek alapján) a koordinátasík összes $\underline{v}$ vektora egyértelműen előáll $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektorok lineáris kombinációjaként $\underline{v} = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j}$ alakban. Az így meghatározott (v_1, v_2) rendezett számpárt a $\underline{v}$ **vektor koordinátái**nak nevezzük. Jele: $\underline{v}(v_1, v_2)$.

TÉTEL: Vektor koordinátáinak kiszámítása kezdő- és végpontjának segítségével: $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

TÉTEL: Ha a $\underline{v}$ vektor koordinátái $\underline{v}(v_1, v_2)$, akkor a **vektor hossza** $|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Vektorműveletek koordinátákkal:

Legyenek $\underline{a}(a_1, a_2)$ és $\underline{b}(b_1, b_2)$ adott vektorok.

TÉTEL: Két vektor összegének a koordinátái az egyes vektorok megfelelő koordinátáinak összegével egyenlők: $\underline{a} + \underline{b}(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

TÉTEL: Két vektor különbségének koordinátái az egyes vektorok megfelelő koordinátáinak különbségével egyenlő: $\underline{a} - \underline{b}(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$.

TÉTEL: Vektor számszorosának koordinátái: $\lambda\underline{a}(\lambda a_1, \lambda a_2)$.

TÉTEL: Vektor ellentettjének koordinátái: $-\underline{a}(-a_1, -a_2)$.

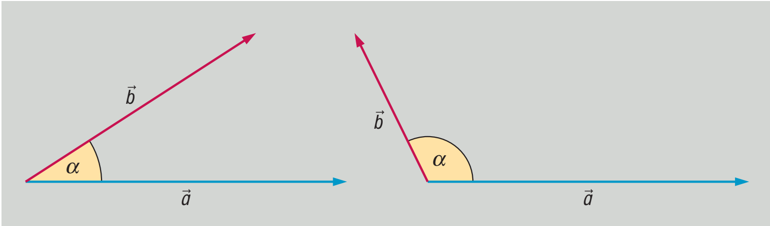
TÉTEL: Ha egy vektort 90º-kal elforgatunk, koordinátái felcserélődnek és az egyik előjelet vált:
Az $\underline{a}(a_1, a_2)$ vektor +90º-os elforgatottjának koordinátái: $\underline{a}'(-a_2, a_1)$.
–90º-os elforgatottjának koordinátái: $\underline{a}''(a_2, -a_1)$.

V. Skaláris szorzat

DEFINÍCIÓ: Két vektor szöge:

- Egyállású vektorok szöge 0º, ha egyirányúak; vagy 180º, ha ellentétes irányúak.

- Nem egyállású vektorok esetén a vektorok hajlásszögén a közös pontból kiinduló vektorok félegyenesei által bezárt konvex szöget értjük.



DEFINÍCIÓ: Tetszőleges két vektor **skaláris szorzata** a két vektor abszolút értékének és hajlásszögük koszinuszának szorzata: $\underline{a}\cdot\underline{b}=|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\alpha$.

Skaláris szorzat tulajdonságai:

1. kommutatív: $\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a}$.
2. disztributív: $\begin{cases}\lambda\cdot(\underline{a}\cdot\underline{b})=(\lambda\cdot\underline{a})\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot(\lambda\cdot\underline{b})\\(\underline{a}+\underline{b})\cdot c=\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{b}\cdot\underline{c}\end{cases}$

TÉTEL: Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra: $\underline{a}\cdot\underline{b}=0 \iff \underline{a}\perp\underline{b}$.

TÉTEL: Két vektor skaláris szorzata koordinátákkal: $\underline{a}\cdot\underline{b}=a_1b_1+a_2b_2$, azaz a megfelelő koordináták szorzatának összege.

BIZONYÍTÁS:

$$\underline{a}(a_1,a_2) \Rightarrow \underline{a}=a_1\underline{i}+a_2\underline{j}$$

$$\underline{b}(b_1,b_2) \Rightarrow \underline{b}=b_1\underline{i}+b_2\underline{j}$$

$$\left.\begin{aligned}&\underline{a}\cdot\underline{b}=(a_1\underline{i}+a_2\underline{j})\cdot(b_1\underline{i}+b_2\underline{j})=a_1b_1\underline{i}^2+a_1b_2\underline{i}\cdot\underline{j}+a_2b_1\underline{i}\cdot\underline{j}+a_2b_2\underline{j}^2\\&\underline{i}^2=1\cdot1\cdot\cos0°=1\\&\underline{j}^2=1\cdot1\cdot\cos0°=1\\&\underline{i}\cdot\underline{j}=\underline{j}\cdot\underline{i}=1\cdot1\cdot\cos90°=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b}=a_1b_1+a_2b_2\ \square$$

VI. Alkalmazások:

- vektorok bizonyításban: háromszög súlypontja harmadolja a súlyvonalakat; Euler-egyenes: a háromszög köré írható kör középpontja, súlypontja, magasságpontja egy egyenesen van és $\frac{KS}{SM}=\frac{1}{2}$.
- szögfüggvények tetszőleges forgásszögre történő definiálása egységvektorok segítségével történik
- fizikában vektormennyiségek (erő, elmozdulás) összeadásában, felbontásában, munka egyenlő az erő és az elmozdulás skaláris szorzatával
- skaláris szorzat: koszinusztétel bizonyítása
- koordinátageometriában az egyenes normálvektora, illetve irányvektora segítségével az egyenes egyenletének felírása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A vektor fogalma absztrakció útján alakult ki, használata a matematikában és a fizikában végigkíséri tanulmányainkat. Először az eltolás, mint geometriai transzformáció kapcsán tanulmányozzuk, ezalatt tapasztaljuk, hogy a vektormodellben való gondolkodás segít a problémamegoldásban, fizikában a jelenségek értelmezésében, pl. elmozdulás, erő, sebesség leírásában, a munka jellemzésében.

- **Descartes** francia matematikus az 1600-as években alkotta meg a derékszögű koordinátarendszert, geometriai problémák megoldásakor sokszor alkalmazott algebrai módszereket. Írt egy Geometria című könyvet, amelyben egy pont helyzetét két koordinátájával adjuk meg.
- **Hamilton** ír matematikus és csillagász használta először a vektor elnevezést az 1800-as években.

18. Szakaszok és egyenesek a koordinátasíkon. Párhuzamos és merőleges egyenesek. Elsőfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek grafikus megoldása.

Vázlat:

I. Szakaszok a koordinátasíkon: szakasz hossza, osztópontok
II. Az egyenest meghatározó adatok
III. Az egyenes egyenletei
IV. Egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének feltételei
V. A lineáris függvény grafikonjának és az egyenesnek kapcsolata
VI. Elsőfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása
VII. Elsőfokú egyenletrendszerek grafikus megoldása
VIII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

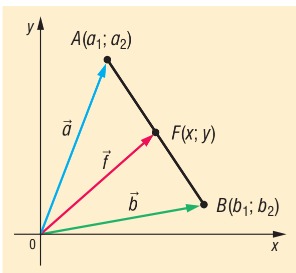
I. Szakaszok a koordinátasíkon: szakasz hossza, osztópontok

TÉTEL: A síkbeli derékszögű koordinátarendszerben az $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$ végpontokkal meghatározott szakasz hossza az $\overrightarrow{AB}$ hossza: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, ami egyben az A és B pontok távolsága.

Szakasz osztópontjainak koordinátái, ahol $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$:

TÉTEL: Szakasz felezőpontjának koordinátái $F\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}; \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

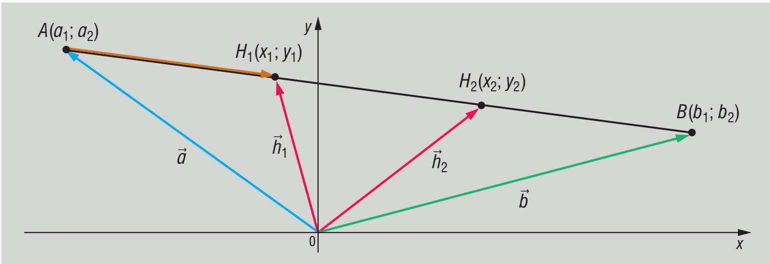
BIZONYÍTÁS: $\overrightarrow{AF} = \dfrac{\underline{b} - \underline{a}}{2} \Rightarrow \underline{f} = \underline{a} + \dfrac{\underline{b} - \underline{a}}{2} = \dfrac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$. □



TÉTEL: Szakasz harmadolópontjainak koordinátái $\begin{cases} H\left(\dfrac{2a_1+b_1}{3}; \dfrac{2a_2+b_2}{3}\right) \\ G\left(\dfrac{a_1+2b_1}{3}; \dfrac{a_2+2b_2}{3}\right) \end{cases}.$

BIZONYÍTÁS:

$$\left.\begin{aligned} \underline{h} &= \underline{a} + \overrightarrow{AH} = \underline{a} + \frac{\overrightarrow{AB}}{3} = \underline{a} + \frac{\underline{b}-\underline{a}}{3} = \frac{2\underline{a}+\underline{b}}{3} \\ \underline{g} &= \underline{a} + \overrightarrow{AG} = \underline{a} + \frac{2\overrightarrow{AB}}{3} = \underline{a} + \frac{2(\underline{b}-\underline{a})}{3} = \frac{\underline{a}+2\underline{b}}{3} \end{aligned}\right\}. \square$$



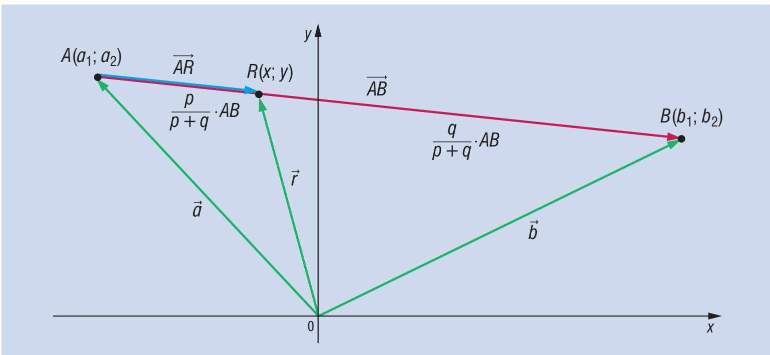
TÉTEL: Az AB szakaszt $p : q$ arányban osztó pont koordinátái: $R\left(\dfrac{qa_1+pb_1}{p+q}; \dfrac{qa_2+pb_2}{p+q}\right).$

BIZONYÍTÁS:

$$\frac{AR}{RB} = \frac{p}{q} \Rightarrow \overrightarrow{AR} = \frac{p}{p+q} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{p}{p+q} \cdot (\underline{b} - \underline{a})$$

$$\overrightarrow{OR} = \underline{r} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR} = \underline{a} + \frac{p}{p+q} \cdot (\underline{b} - \underline{a}) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\underline{a}(p+q) + p(\underline{b}-\underline{a})}{p+q} = \frac{p\underline{a} + q\underline{a} + p\underline{b} - p\underline{a}}{p+q} = \frac{q\underline{a} + p\underline{b}}{p+q}. \square$$



II. Egyenest meghatározó adatok

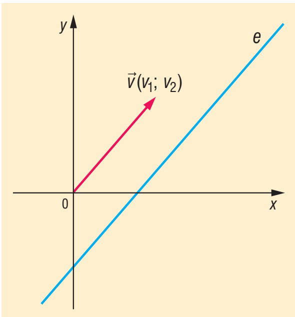
Egy egyenest a síkban egyértelműen meghatározhatunk 2 pontja, vagy egy pontja és egy, az állását jellemző adata segítségével. Ilyen, az egyenes állását jellemző adat: az egyenes irányvektora, normálvektora, irányszöge, iránytangense.

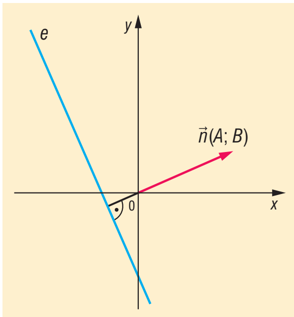
DEFINÍCIÓ: Az **egyenes irányvektora** bármely, az egyenessel párhuzamos, nullvektortól különböző vektor. Jele: $\underline{v}(v_1; v_2)$.

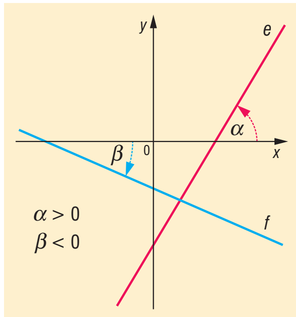
DEFINÍCIÓ: Az **egyenes normálvektora** bármely, az egyenesre merőleges, nullvektortól különböző vektor. Jele: $\underline{n}(A; B)$.

DEFINÍCIÓ: Az **egyenes irányszögé**nek nevezzük azt a $-\frac{\pi}{2} < \alpha \le \frac{\pi}{2}$ szöget, amelyet az egyenes az x tengely pozitív irányával bezár.

DEFINÍCIÓ: Az egyenes irányszögének tangensét (amennyiben létezik) az **egyenes iránytangensé**nek (**iránytényezőjé**nek vagy **meredekségé**nek) nevezzük. Jele: $m = \mathrm{tg}\alpha$. Az $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$ irányszögű, vagyis az y tengellyel párhuzamos egyenesnek nincs iránytangense.







Összefüggések az egyenes állását meghatározó adatok között:

- ha az egyenes egy **irányvektor**a $\underline{v}(v_1; v_2)$, akkor normálvektora lehet $\underline{n}(-v_2; v_1)$ vagy $\underline{n}(v_2; -v_1)$, illetve meredeksége $m = \frac{v_2}{v_1} = \mathrm{tg}\alpha$, ebből felírható az α irányszög is.
- ha az egyenes egy **normálvektor**a $\underline{n}(A; B)$, akkor irányvektora lehet $\underline{v}(-B; A)$ vagy $\underline{v}(B; -A)$; illetve meredeksége $m = -\frac{A}{B}$ $(B \ne 0) = \mathrm{tg}\alpha$, ebből felírható az α irányszög is.
- ha az egyenes **meredeksége** m, akkor ebből irányszöge $\alpha = \mathrm{arctg}m$, irányvektora lehet: $\underline{v}(1; m)$, normálvektora $\underline{n}(-m; 1)$ vagy $\underline{n}(m; -1)$.
- ha az egyenes **irányszöge** α, akkor meredeksége $m = \mathrm{tg}\alpha$. Ebből irányvektor és normálvektor is meghatározható. Ha $\alpha = 90°$, akkor m nem létezik, de $\underline{v}(0; 1)$, illetve $\underline{n}(1; 0)$.

Összefüggés az egyenes két adott pontja és az egyenes állását meghatározó adatok között:

Ha az egyenes két különböző pontja $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$, akkor $\overrightarrow{AB}$ lehet az egyenes egy irányvektora: $\underline{v}(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ egy normálvektora $\underline{n}(a_2 - b_2; b_1 - a_1)$ vagy $\underline{n}(b_2 - a_2; a_1 - b_1)$, meredeksége $m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$; ebből felírható irányszöge is: $\alpha = \mathrm{arctg}m$.

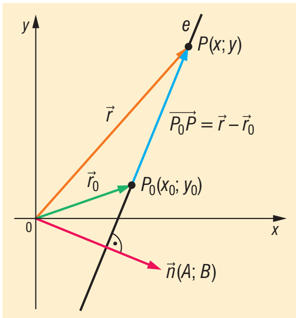
III. Az egyenes egyenletei

DEFINÍCIÓ: Egy **alakzat egyenletén**, a síkbeli xy koordináta-rendszerben, olyan egyenletet értünk, melyet az alakzat pontjainak koordinátái kielégítenek, de más síkbeli pontok nem.

TÉTEL: Ha egy egyenesnek adott a $P_0(x_0;\, y_0)$ pontja és egy $\underline{n}(A;B)$ normálvektora, akkor az egyenes **normálvektoros egyenlete**: $Ax + By = Ax_0 + By_0$.

BIZONYÍTÁS: Egy $P(x;\, y)$ pont akkor és csak akkor van rajta az e egyenesen, ha a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor merőleges az egyenes $\underline{n}(A;B)$ normálvektorára.

Ha P_0 pont helyvektorát $\underline{r}_0$, a P pont helyvektorát a $\underline{r}$ jelöli, akkor $\overrightarrow{P_0P} = \underline{r} - \underline{r}_0$, koordinátákkal $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0;\, y - y_0)$.



$\overrightarrow{P_0P}$ akkor és csak akkor merőleges az egyenes normálvektorára, ha skaláris szorzatuk 0, azaz $\overrightarrow{P_0P} \cdot \underline{n} = 0$, vagyis $(x - x_0) \cdot A + (y - y_0) \cdot B = 0$, rendezve $Ax + By = Ax_0 + By_0$.□

TÉTEL: Ha egy egyenesnek adott a $P_0(x_0;\, y_0)$ pontja és egy $\underline{v}(v_1;v_2)$ irányvektora, akkor az egyenes **irányvektoros egyenlete**: $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$.

BIZONYÍTÁS: Ha $\underline{v}(v_1;v_2)$ irányvektor, akkor $\underline{n}(v_2;-v_1)$ egy normálvektor. Ezt helyettesítve ($A = v_2$; $B = -v_1$) a normálvektoros egyenletbe, kész a bizonyítás.□

TÉTEL: Ha adott az y tengellyel nem párhuzamos egyenes egy $P_0(x_0;\, y_0)$ pontja és m iránytangense, akkor **iránytényezős egyenlete** $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

BIZONYÍTÁS: Ha m iránytényező, akkor $\underline{v}(1;m)$ irányvektor, vagyis $\underline{n}(m;-1)$ normálvektor. Ezt behelyettesítve ($A = m$; $B = -1$) a normálvektoros egyenletbe $mx - y = mx_0 - y_0 \Leftrightarrow y - y_0 =$ $= mx - mx_0 \Leftrightarrow y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.□

TÉTEL: Az y tengellyel párhuzamos, $P_0(x_0;\, y_0)$ ponton átmenő egyenes egyenlete: $x = x_0$.

DEFINÍCIÓ: **Két egyenes metszéspontja** (ha létezik) egy olyan pont, amely illeszkedik mindkét egyenesre.
A metszéspont koordinátái a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásai.

DEFINÍCIÓ: **Két egyenes hajlásszöge** visszavezethető irányvektoraik vagy normálvektoraik szögére.

Két vektor szögét skaláris szorzattal számolhatjuk ki: $\cos\varphi = \dfrac{\underline{n}_e \cdot \underline{n}_f}{|\underline{n}_e| \cdot |\underline{n}_f|}$, vagy

$$\cos\varphi = \frac{\underline{v}_e \cdot \underline{v}_f}{|\underline{v}_e| \cdot |\underline{v}_f|}.$$

IV. Két egyenes merőlegessége és párhuzamossága:

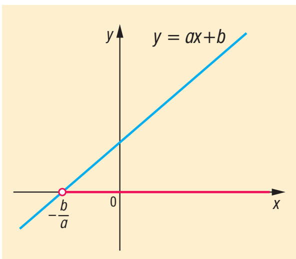
Legyen két egyenes e és f, irányvektoraik $\underline{v}_e$ és $\underline{v}_f$, normálvektoraik: $\underline{n}_e$ és $\underline{n}_f$, irányszögeik α_e és α_f, iránytangenseik m_e és m_f (ha léteznek)

- $e \parallel f \Leftrightarrow$ $\underline{v}_e \parallel \underline{v}_f$, azaz van olyan λ ($\neq 0$) valós szám, hogy $\underline{v}_e = \lambda \cdot \underline{v}_f$, vagy
  $\underline{n}_e \parallel \underline{n}_f$, azaz van olyan λ ($\neq 0$) valós szám, hogy $\underline{n}_e = \lambda \cdot \underline{n}_f$, vagy
  $\alpha_e = \alpha_f$, vagy
  $m_e = m_f$.
- $e \perp f \Leftrightarrow$ $\underline{v}_e \perp \underline{v}_f$, azaz $\underline{v}_e \cdot \underline{v}_f = 0$, vagy
  $\underline{n}_e \perp \underline{n}_f$, azaz $\underline{n}_e \cdot \underline{n}_f = 0$, vagy
  $\underline{n}_e = \lambda \cdot \underline{v}_f$ ($\lambda \neq 0$), vagy
  $\underline{v}_e = \lambda \cdot \underline{n}_f$ ($\lambda \neq 0$), vagy
  $m_e \cdot m_f = -1$.

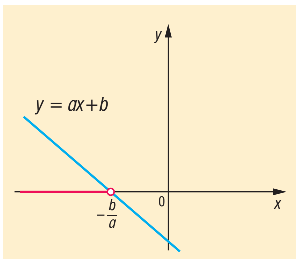
V. Elsőfokú egyenlőtlenségek

DEFINÍCIÓ: Elsőfokú egyismeretlenes egyenlőtlenségek $ax + b > 0$ ($a \neq 0$) alakba hozhatóak.

Ha $a > 0$, akkor $x > -\frac{b}{a}$



Ha $a < 0$, akkor $x < -\frac{b}{a}$

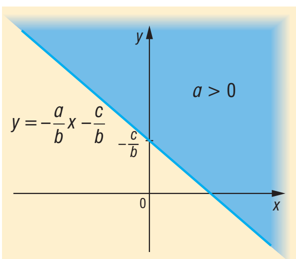


Megengedett az egyenlőség is, így természetesen a megoldásban is.

DEFINÍCIÓ: Elsőfokú kétismeretlenes egyenlőtlenségek $ax + by + c > 0$ ($a \neq 0$) alakba hozhatóak.

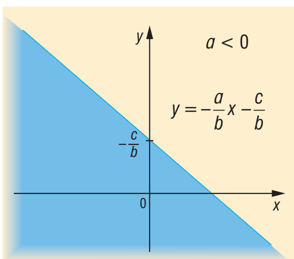
Ha $b > 0$, akkor

$y > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$



Ha $b < 0$, akkor

$y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$



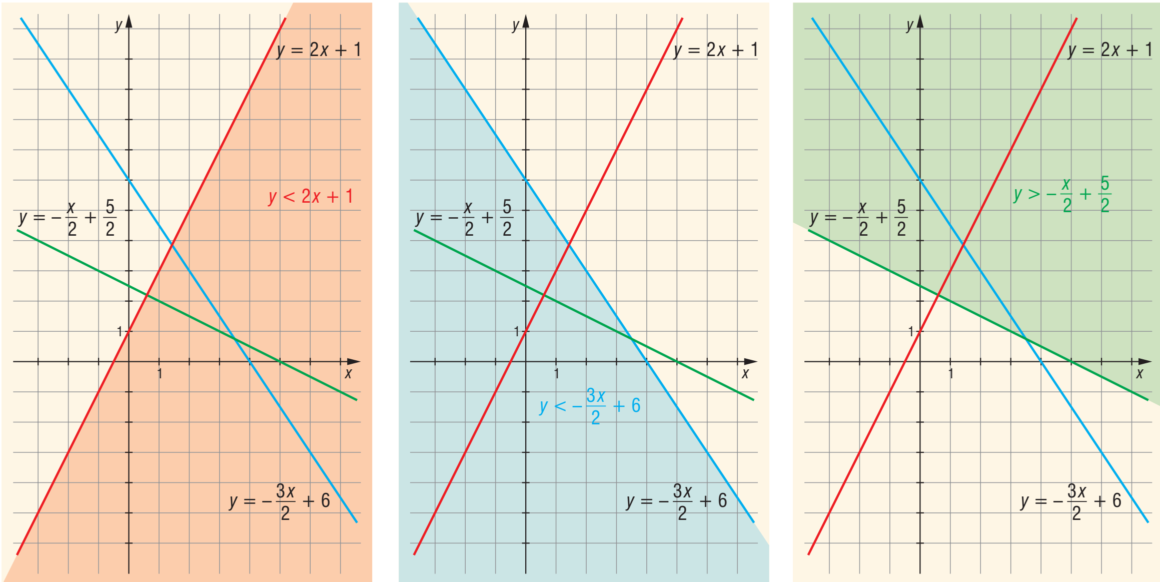
Ha $b = 0$, akkor

$ax + c > 0$. (egyismeretlenes)

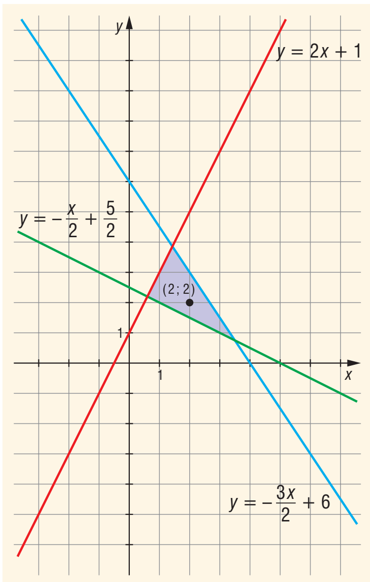
VI. Alkalmazások:

- Adott tulajdonságú ponthalmazok keresése, ha elemi módszerrel nem boldogulunk.
- Kétismeretlenes egyenlőtlenségrendszer megoldása
  Pl.:

$$\left.\begin{aligned} -2x+y&<1 \\ 3x+2y&<12 \\ x+2y&>5 \end{aligned}\right\} x,y\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} y&<2x+1 \\ y&<-\frac{3}{2}x+6 \\ y&>-\frac{x}{2}+\frac{5}{2} \end{aligned}\right\} x,y\in\mathbb{Z}$$

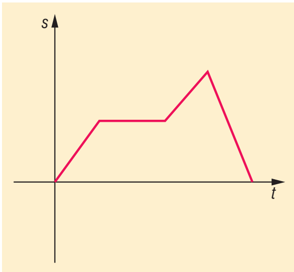


A három terület metszete:



$P(2;\,2)$ az egyetlen megfelelő pont $\Rightarrow x = 2,\ y = 2$.

- A lineáris programozás (egyes folyamatok leggazdaságosabb megszervezésének módszere) bizonyos lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldásával és ennek feltételeivel foglalkozik.
- Elemi geometriai problémák egyszerűbb megoldása. Pl.: a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Eddig ezt geometriai módon bizonyítottuk, koordináta-geometriai ismeretekkel beláthatjuk algebrai módszerekkel. Célszerű $A(a; 0)$, $B(b; 0)$ $C(c_1; c_2)$ helyzetbe illeszteni a háromszöget, azaz az x tengelyre felvenni a háromszög két csúcspontját.
- Egyenletes mozgások út-idő grafikonja mindig egyenes (szakasz); a mozgások vizsgálatakor a mozgás pályájának ismeretében információkat kaphatunk a mozgásról:



Matematikatörténeti vonatkozások:

- A koordináta-geometria (analitikus geometria) alapvető jellemzője, hogy geometriai problémákat, feladatokat algebrai módszerekkel, a koordináta-rendszer segítségével tárgyalja és oldja meg. A geometriának ez a megközelítése először **Apollóniusz** kúpszeletekről írt könyvében jelenik meg Kr.e. 3. században.
- **Ptolemaiosz** (Kr.e. kb .150) a Föld egy pontjának helyét a mai földrajzi szélességnek és hosszúságnak megfelelő adatokkal határozta meg, tehát gömbi koordinátákat használt.
- **Descartes** 1637-ben megjelent Geometria c. könyvét tekintjük az első koordinátageometriai műnek, ebben már következetesen használja az újkori matematikai jelöléseket. Ebben a könyvében aritmetizálta az Euklideszi geometriát: Descartes középpontba állítja az origót, a centrumot, és a belőle sugárzó alapirányokat, azaz a vertikális és a horizontális tengelyt. A descartes-i koordinátarendszernek köszönhetően a görbék leírhatók egyenlettel.
- A koordináta szó az 1700-as évek elejétől **Leibniz** német matematikustól származik.

19. A kör és a parabola a koordinátasíkon. Kör és egyenes, parabola és egyenes kölcsönös helyzete. Másodfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása.

Vázlat:

I. Kör definíciója, egyenlete
II. Parabola definíciója, egyenletei
III. Kör és egyenes kölcsönös helyzete
IV. Parabola és egyenes kölcsönös helyzete
V. Másodfokú egyenlőtlenségek
VI. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

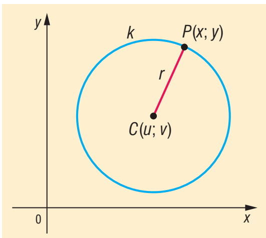
Kidolgozás

I. Kör és egyenlete

DEFINÍCIÓ: A **kör** azon pontok halmaza a síkon, amelyek egy adott ponttól adott távolságra vannak. Az adott pontot a kör középpontjának, az adott távolságot a kör sugarának nevezzük. Tehát a kört a síkon egyértelműen meghatározza a középpontja és sugara.

TÉTEL: A $C(u; v)$ középpontú, r sugarú **kör egyenlete** $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$.

BIZONYÍTÁS: A $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor van a körön, ha CP távolság éppen r, azaz $CP = r$.



$CP = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} = r \;\Rightarrow$ mivel mindkét oldal nemnegatív, négyzetre emeléssel ekvivalens kifejezéshez jutunk: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$, amit a kör pontjai kielégítenek, de más pontok nem. □

A kör egyenlete kétismeretlenes másodfokú egyenlet, hiszen az egyenlete:

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + u^2 + v^2 - r^2 = 0$$

alakra hozható, azaz átalakítható:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

alakúra, ahol A, B, C olyan valós számok, amelyekre $A^2 + B^2 - 4C > 0$.
Ekkor a kör középpontjának koordinátáira:

$$-2u = A \;\Rightarrow\; u = -\frac{A}{2}; \quad -2v = B \;\Rightarrow\; v = -\frac{B}{2};$$

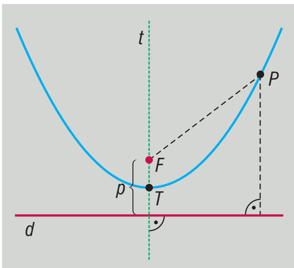
illetve

$$u^2+v^2-r^2=C \Rightarrow \frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-r^2=C \Rightarrow r^2=\frac{A^2+B^2}{4}-C \Rightarrow r^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4} \Rightarrow$$
$$r=\sqrt{\frac{A^2+B^2-4C}{4}}=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}.$$

Azaz a kör középpontja $C\left(-\frac{A}{2};-\frac{B}{2}\right)$, sugara $r=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$. Ebből láthatjuk, hogy nem minden $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ egyenlet kör egyenlete.

II. Parabola és egyenletei

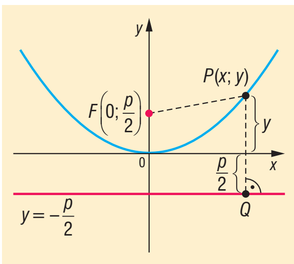
DEFINÍCIÓ: A **parabola** azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy v egyenesétől és az egyenesre nem illeszkedő F ponttól egyenlő távolságra vannak.
Az adott egyenes a parabola **vezéregyenes**e (direktrixe), az adott pont a parabola **fókuszpont**ja.



A vezéregyenes és a fókuszpont távolsága a parabola **paraméter**e ($p>0$).
A fókuszpontra illeszkedő és a vezéregyenesre merőleges egyenes a parabola szimmetriatengelye, röviden **tengely**e (t).
A parabola tengelyen lévő pontja a parabola **tengelypont**ja (T). A tengelypont felezi a fókusz és a vezéregyenes távolságát.

TÉTEL: Az $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ fókuszpontú $y=-\frac{p}{2}$ vezéregyenesű **parabola egyenlete**: $y=\frac{1}{2p}x^2$.
Ez azt is jelenti, hogy a parabola tengelypontja $T(0;0)$, paramétere p (és a fókusza a tengelypont felett van, azaz a parabola „pozitív” állású), ekkor a parabola egyenlete $y=\frac{1}{2p}x^2$.

BIZONYÍTÁS:



A vezéregyenes egyenlete: $y=-\frac{p}{2}$. Egy síkbeli P pont akkor és csak akkor illeszkedik a parabolára, ha a parabola fókuszától és vezéregyenesétől egyenlő távolságra van. A P pont és a vezéregyenes távolsága egyenlő a PQ távolsággal, ahol Q a P pont merőleges vetülete a v vezéregyenesen, ezért $Q\left(x;-\frac{p}{2}\right)$.

$$\left.\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x-x)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(y+\frac{p}{2}\right)^2} \\ PF &= \sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2} \end{aligned}\right\} PQ = PF\,,$$

azaz

$$\sqrt{\left(y+\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}\,.$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens egyenletet ad:

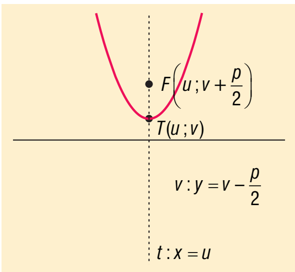
$$\left(y+\frac{p}{2}\right)^2 = x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2$$

$$y^2+py+\frac{p^2}{4} = x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4}$$

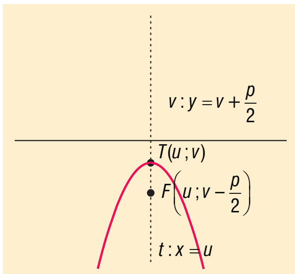
$2py = x^2 \;\Rightarrow$ (mivel $p > 0$): $y = \frac{1}{2p}x^2$ (origó tengelypontú $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ fókuszpontú parabola tengelyponti egyenlete). □

TÉTEL: A p paraméterű $T(u, v)$ tengelypontú parabolák tengelyponti egyenlete és jellemzőik:

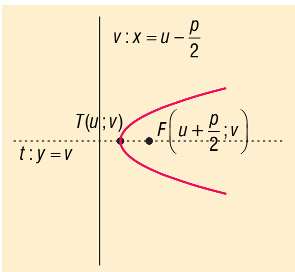
$y = \frac{1}{2p}(x-u)^2+v$



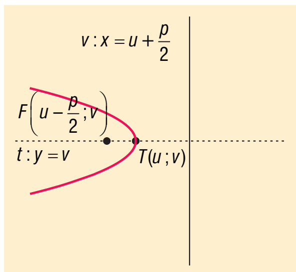
$y = -\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$



$x = \frac{1}{2p}(y-v)^2+u$



$x = -\frac{1}{2p}(y-v)^2+u$



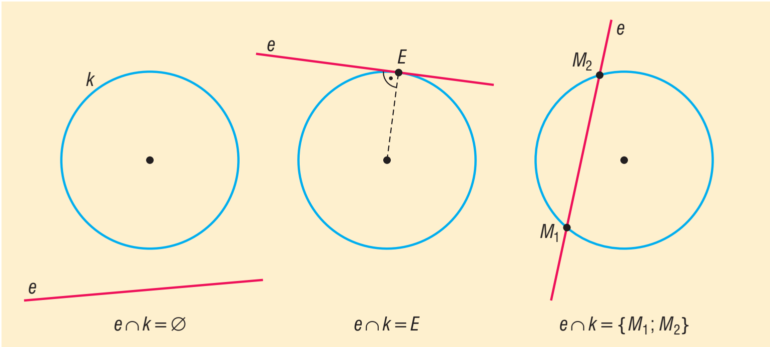
Minden másodfokú függvény grafikonja az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola, és minden y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola valamelyik másodfokú függvény grafikonja.

$\Rightarrow$ $f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c = y$ teljes négyzetté alakítva átalakítható $y = \pm\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$ alakba.

$\Leftarrow$ Minden $y = \pm\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$ parabola esetén zárójelfelbontás, összevonás után megkapható az $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ alak.

III. Kör és egyenes kölcsönös helyzete

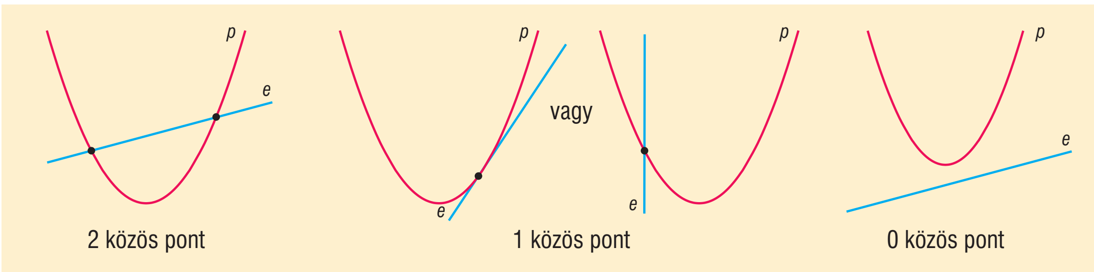
Egy síkban egy körnek és egy egyenesnek háromféle helyzete lehet: **nincs közös pont**juk, egy közös pontjuk van (az egyenes **érinti** a kört), két közös pontjuk van (az egyenes **metszi** a kört).



Egy kör és egy egyenes közös pontjainak a meghatározása az egyenleteikből álló egyenletrendszer megoldásával történik a következő módon:
Az egyenes egyenletéből kifejezzük az egyik ismeretlent, és azt a kör egyenletébe behelyettesítjük. Így egy másodfokú egyismeretlenes egyenletet kapunk.
Az egyenlet diszkriminánsa határozza meg a közös pontok számát. Ha $D > 0$, akkor az egyenletnek 2 megoldása van, vagyis az egyenes metszi a kört. Ha $D = 0$, akkor az egyenletnek egy megoldása van, vagyis az egyenes érinti a kört. Ha $D < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, vagyis az egyenesnek és a körnek nincs közös pontja.

IV. Parabola és egyenes kölcsönös helyzete

Parabola és egyenes közös pontjainak a száma lehet 2, 1, 0.



Az a tény, hogy a parabolának és az egyenesnek egy közös pontja van, nem jelenti azt, hogy az egyenes érintője a parabolának, mert az is lehetséges, hogy az egyenes párhuzamos a parabola tengelyével.

DEFINÍCIÓ: A **parabola érintője** olyan egyenes, melynek egy közös pontja van a parabolával és nem párhuzamos a parabola tengelyével.

Parabola és érintőjének meghatározása kétféle módon:

- Az egyenes egyenletét egy paraméterrel felírva (célszerű paraméternek az m meredekséget választani), ilyenkor is figyelni kell, hogy m ne a tengellyel párhuzamos egyenesre utaljon. Olyan m értéket keresünk, amely az egyenesre felírt elsőfokú, paraméteres, kétismeretlenes egyenletnek, vagyis egyenletrendszernek pontosan egy megoldáspárját adja.
  A megoldás módja pl. a parabola egyenletéből behelyettesítünk az egyenes egyenletébe (vagy fordítva), ekkor egy paraméteres, egyismeretlenes, másodfokú egyenletet kapunk.
  Az egyenes akkor és csak akkor érinti a parabolát, ha az egyenlet diszkriminánsa 0. Az így kapott (általában m-re nézve másodfokú) egyenlet valós megoldásai (ha léteznek) adják a kérdéses érintők meredekségét, amiből egyenletük már felírható.
- Az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola érintőjének meredeksége a parabola egyenletéből kapható másodfokú függvény deriváltjából határozható meg (ez jóval gyorsabb és egy-

szerűbb az előző módszernél).
Az y tengellyel nem párhuzamos tengelyű, vagyis az x tengellyel párhuzamos tengelyű parabola érintőjének meredeksége a parabola egyenletéből kapható gyökfüggvény (figyelni kell, hogy melyik ágát nézzük) deriváltjából határozható meg (ez bonyolultabb, nagyobb odafigyelést kíván az előző módszernél).

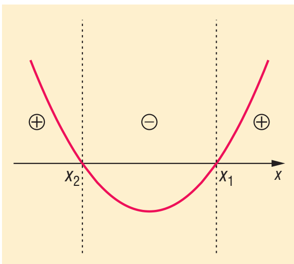
V. Másodfokú egyenlőtlenségek

DEFINÍCIÓ: Egyenlőtlenségről beszélünk, ha algebrai kifejezéseket a <, >, ≤, ≥ jelek valamelyikével kapcsoljuk össze. Ha ezek a kifejezések másodfokúak, akkor **másodfokú egyenlőtlenség**ről beszélünk.

Az **egyenlőtlenségek megoldási módszerei** hasonlóak az egyenletek megoldási módszereihez:

1. A **mérlegelv** alkalmazásánál az egyik eltérés a negatív értékkel való szorzás, illetve osztás, mert ekkor az egyenlőtlenség iránya megváltozik. Ezért el kell kerülni az ismeretlent tartalmazó kifejezéssel történő szorzást, osztást. Ehelyett 0-ra rendezés után előjelvizsgálatot kell végezni, amit célszerű grafikusan megoldani. Másik eltérés a két oldal reciprokának vételekor áll fenn. Mindkét oldal reciprokát véve, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalán negatív kifejezés áll, akkor a reláció iránya megváltozik, különben a reláció nem változik.

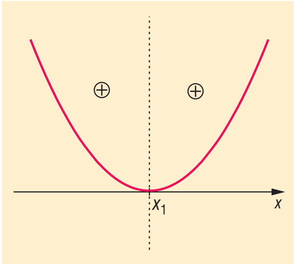
2. **Grafikus megoldás:** A másodfokú egyenlőtlenségek megoldásánál fontos szerepet játszik, hogy az egyenlőtlenségekben szereplő másodfokú kifejezések grafikonja a koordinátarendszerben parabola. A másodfokú egyenlet megoldásához hasonlóan 0-ra rendezünk úgy, hogy a főegyüttható pozitív legyen, tehát $a > 0$. Ekkor $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ vagy $ax^2 + bx + c < 0$ alakú minden másodfokú egyenlőtlenség.
Ha a bal oldalon álló kifejezés által meghatározott függvényt ($f(x) = ax^2 + bx + c$) ábrázoljuk, akkor, mivel a értéke pozitív, ezért felül nyitott, pozitív állású parabolát kapunk. Az egyenlőtlenség megoldása ekkor egyenértékű az $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) > 0$, illetve $f(x) < 0$ vizsgálattal.
Ehhez először határozzuk meg az $f(x)$ függvény **zérushelyei**t:
   - Ha két zérushely van, x_1 és x_2 (ahol $x_2 < x_1$), akkor lehetőségeink az $f(x)$ függvény előjelére ($f(x_1) = f(x_2) = 0$):



Egyenlőtlenség	Megoldáshalmaz
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in]-\infty, x_2] \cup [x_1, \infty[$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in]-\infty, x_2[\cup]x_1, \infty[$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x \in [x_2, x_1]$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in]x_2, x_1[$

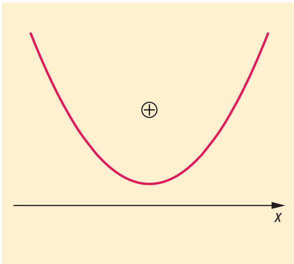
Azaz, ha ≥ helyett >, ≤ helyett < szerepel csak, akkor megoldásunkban a zárt intervallumvégeket nyitottra cseréljük.

- Ha egy zérushely van, x_1, akkor lehetőségeink az $f(x)$ függvény előjelére ($f(x_1) = 0$):



Egyenlőtlenség	Megoldáshalmaz
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x = x_1$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in \{\ \}$

- Ha 0 zérushely van, akkor $f(x)$ mindenütt pozitív:

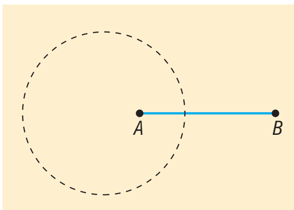


Egyenlőtlenség	Megoldáshalmaz
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x \in \{\ \}$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in \{\ \}$

VI. Alkalmazások:

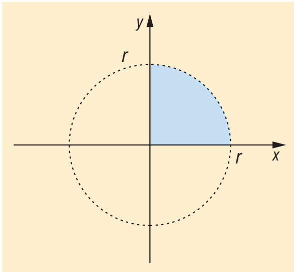
Koordinátageometria segítségével elemi geometriai feladatok algebrai úton oldhatók meg:

- Adott tulajdonságú ponthalmaz keresése: Mi azon P pontok halmaza, amelyekre adott A, B esetén $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{3}$?
  (Apollóniosz-kör)

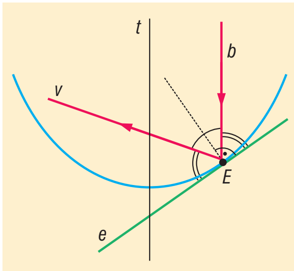


- Kör területének meghatározása integrálással (kell hozzá az integrálandó függvény)

$$x^2+y^2=r^2 \;\Rightarrow\; y=\sqrt{r^2-x^2} \;\Rightarrow\; T=\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{r^2\pi}{4}$$



- A parabolaantenna működésének lényege a parabola és fókuszának tulajdonságával magyarázható: a tengellyel párhuzamosan beeső jel a fókuszon keresztül verődik vissza.



- Mesterséges égitestek pályája az úgynevezett szökési sebesség esetén parabola.
- Szélsőérték-feladatok megoldása.

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Már a Kr.e. 3. században élt nagy görög matematikus, **Apollóniusz** is foglalkozott a kúpszeletekkel: a körrel, az ellipszissel, a parabolával és a hiperbolával. 8 kötetes művének óriási hatása volt a későbbi korok matematikusaira (**Arkhimédész**-re, Descartes-ra, Fermat-ra). Az ő munkásságától függetlenül először Euler írt a kúpszeletekről 1748-ban.
- **Fermat** (1601–1665) francia matematikus Descartes előtt megalkotta a koordináták módszerét, megkereste az egyenes és a kúpszeletek egyenletét. Viszont kutatása nem volt hatással az analitikus geometria fejlődésére, ugyanis gondolatait csak levelezőpartnereivel osztotta meg.
- **Descartes** 1637-ben megjelent Geometria c. könyvét tekintjük az első koordinátageometriai műnek, ebben már következetesen használja az újkori matematikai jelöléseket. Ebben a könyvében aritmetizálta az **Euklideszi** geometriát: Descartes középpontba állítja az origót, a centrumot, és a belőle sugárzó alapirányokat, azaz a vertikális és a horizontális tengelyt. A descartes-i koordinátarendszernek köszönhetően a görbék leírhatók egyenlettel.
- **Euler** (1707–1783) svájci származású matematikus a kúpszeletekről végzett kutatásaiban elsőként haladta meg Apollóniusz által megállapítottakat. Az analitikus geometria keretében szinte egymaga alkotta meg a ma használatos trigonometriát.

20. Térelemek távolsága és szöge. Térbeli alakzatok. Felszín- és térfogatszámítás.

Vázlat:

I. Térelemek, ezek illeszkedése, párhuzamossága, szöge, távolsága
II. Térbeli alakzatok: testek csoportosítása
III. Testek felszíne
IV. Testek térfogata
V. Testek felszíne, térfogata képletekkel
VI. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Térelemek

Pont, egyenes, sík – alapfogalmak, nem definiáljuk őket, hanem a szemléletből kialakult jelentésükre hagyatkozunk.

DEFINÍCIÓ: Két térelem **illeszkedő**, ha egyik részhalmaza a másiknak.

DEFINÍCIÓ: Két egyenes **párhuzamos**, ha egy síkban vannak és nem metszik egymást.

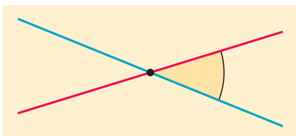
DEFINÍCIÓ: Egyenes és sík, illetve 2 sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk.

DEFINÍCIÓ: Egy egyenest egy rá illeszkedő pont két **félegyenesre** oszt, ez a pont mindkét félegyenes kezdőpontja.

DEFINÍCIÓ: Egy síkban két, azonos pontból kiinduló félegyenest és az általuk meghatározott bármelyik síkrészt **szög**nek nevezzük. A közös kezdőpont a szög csúcspontja, a két félegyenes a szög szárai, a síkrész a szögtartomány.

DEFINÍCIÓ: Illeszkedő vagy párhuzamos **térelemek szög**e 0º.

DEFINÍCIÓ: Két metsző egyenes 4 szöget alkot, ezek közül 2-2 egyenlő. Ha a két egyenes nem merőleges egymásra, akkor a **két egyenes hajlásszöge** a kétfajta szög közül a kisebbik. Ha a két egyenes merőleges egymásra, akkor a hajlásszögük derékszög. Eszerint két metsző egyenes hajlásszöge 90º-nál nem nagyobb.

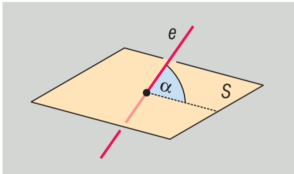


DEFINÍCIÓ: Két egyenes **kitérő**, ha nincsenek egy síkban.

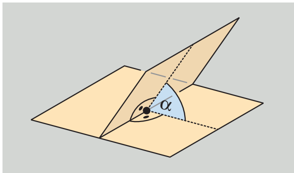
DEFINÍCIÓ: **Két kitérő egyenes hajlásszöge** egyenlő a tér egy tetszőleges pontján átmenő és az adott egyenesekkel párhuzamos egyenesek hajlásszögével. Ez a szög a pont megválasztásától független.

TÉTEL: Egy, a síkot metsző egyenes merőleges a síkra, ha merőleges a sík minden egyenesére (**síkra merőleges egyenes tétele**).
Definíció szerint egy egyenes merőleges a síkra, ha merőleges a sík minden olyan egyenesére, amely átmegy az egyenes és a sík metszéspontján.

DEFINÍCIÓ: Ha az e egyenes nem merőleges a síkra, akkor az egyenes merőleges vetülete a síkon szintén egyenes (*e*’). Ebben az esetben az **egyenes és a sík hajlásszögé**n az egyenes és a vetülete hajlásszögét értjük. Ez a szög a legkisebb az egyenes és a sík egyenesei által bezárt szögek között.



DEFINÍCIÓ: Ha két sík nem párhuzamos egymással, akkor metszésvonaluk egy pontjában mindkét síkban merőlegest állítunk a metszésvonalra. A **két sík hajlásszöge** e két egyenes hajlásszögével egyenlő. Ez a szög a pont megválasztásától független.

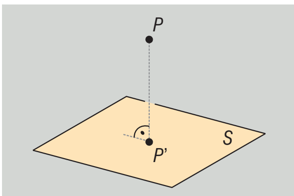


DEFINÍCIÓ: Két illeszkedő vagy metsző **térelem távolsága** 0.

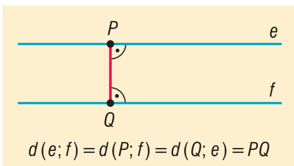
DEFINÍCIÓ: **Két pont távolsága** a pontokat összekötő szakasz hossza.

DEFINÍCIÓ: **Pont és egyenes távolsága** a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza.

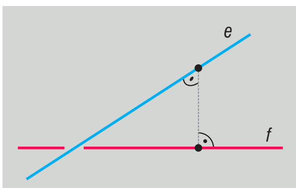
DEFINÍCIÓ: **Pont és sík távolsága** a pontból a síkra bocsátott merőleges szakasz hossza.



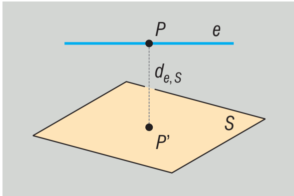
DEFINÍCIÓ: **Párhuzamos egyenesek távolsága**: bármelyik egyenes egy tetszőleges pontjának távolsága a másik egyenestől, azaz a két egyenest összekötő, mindkettőre merőleges szakasz hossza.



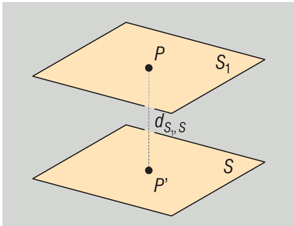
DEFINÍCIÓ: **Két kitérő egyenes távolsága** az őket összekötő, mindkettőre merőleges szakasz hossza. Azt az egyenest, mely mindig létezik és egyértelmű és amely mindkét kitérő egyenesre merőleges, a két egyenes normáltranszverzálisának nevezzük. Így két kitérő egyenes távolsága normáltranszverzálisuk közéjük eső részének hossza.



DEFINÍCIÓ: Egyenes és vele párhuzamos sík távolsága az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól való távolságával egyenlő, azaz az egyenes bármely pontjából a síkra bocsátott merőleges szakasz hosszával egyenlő.



DEFINÍCIÓ: Két párhuzamos sík távolsága az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másiktól vett távolsága, azaz bármelyik sík egy tetszőleges pontjából a másik síkra bocsátott merőleges szakasz hossza.

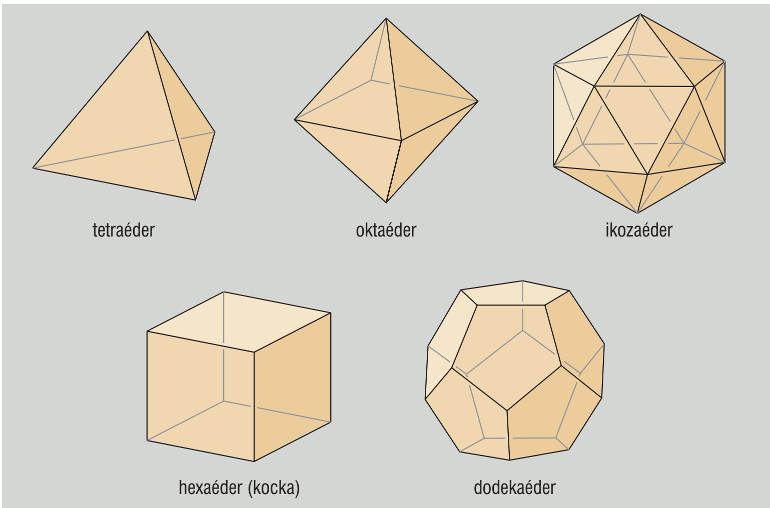


II. Térbeli alakzatok

DEFINÍCIÓ: A térnek véges felületekkel határolt részét **test**nek nevezzük.

DEFINÍCIÓ: A sokszöglapokkal határolt testek a **poliéder**ek.

DEFINÍCIÓ: A **szabályos testek** olyan poliéderek, amelynek lapjai egybevágó szabályos sokszögek, valamennyi lapszögük és élszögük egyenlő.



DEFINÍCIÓ: Hengerszerű testek: egy síkidom kerületén levő pontokon keresztül párhuzamosokat húzunk egy, a síkidom síkjával nem párhuzamos egyenessel. Az így kapott palástfelületet az eredeti síkidom síkjával és egy vele párhuzamos síkkal elmetszünk. A kapott véges test a hengerszerű test. Ha a test alaplapja sokszög, akkor **hasáb**nak, ha kör, **henger**nek nevezzük.

Ha a párhuzamos egyenesek merőlegesek az alaplap síkjára, akkor a testet **egyenes hengerszerű test**nek, különben **ferde hengerszerű test**nek nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Kúpszerű testek: egy síkidom kerületén levő pontokon keresztül egyeneseket húzunk egy, a síkidom síkjára nem illeszkedő ponton keresztül. A kapott véges test a kúpszerű test. Ha a test alaplapja sokszög, akkor **gúlá**nak, ha kör, **kúp**nak nevezzük.

Ha a kúp minden alkotója (az egyeneseknek az adott pont és a síkidom közti szakasza) egyenlő hosszú, akkor egyenes kúpszerű testnek, különben ferde kúpszerű testnek nevezzük.

Csonkakúpszerű testek: ha egy kúpszerű testet az alaplapjával párhuzamos síkkal elmetszünk, akkor a két párhuzamos sík közti testet csonkakúpszerű testnek nevezzük. Ha a test alaplapja sokszög, akkor **csonkagúlá**nak, ha kör, **csonkakúp**nak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Gömbfelület: egy adott ponttól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a térben. Gömböt kapunk, ha egy kört valamelyik átmérője mentén megforgatunk.

III. Testek felszíne

A felszín jele: ***A***

Poliéderek felszíne a poliédert határoló véges számú sokszöglap területének az összege.

Poliéderektől különböző testek felszíne:

- Ha a test felülete síkba kiteríthető, akkor ennek a kiterített felületnek a területe adja a test felszínét (pl. henger, kúp).
- Bármely nem poliéder felszíne a test által tartalmazott, illetve a testet tartalmazó poliéderek felszíneivel határozható meg a kétoldali közelítés módszerével. Ha egyetlen olyan pozitív valós szám van, amely az adott testet tartalmazó poliéderek felszíneinél nem nagyobb, valamint az adott test által tartalmazott poliéderek felszíneinél nem kisebb, akkor azt a test felszínének tekintjük.

Forgástestek felszíne:

TÉTEL: Ha $f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumon folytonos és $f(x) \geq 0$, akkor az $f(x)$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest palástjának felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x .$$

Ha a forgástest teljes felszínét akarjuk meghatározni, akkor a kapott palásthoz hozzá kell adni az alaplap és a fedőlap területét is.

TÉTEL: Hasonló testek felszínének aránya megegyezik a hasonlóság arányának négyzetével.

IV. Testek térfogata

A térfogat jele: ***V***

Poliéder térfogata poliéderre jellemző pozitív szám, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- Az egységkocka térfogata 1.
- Az egybevágó poliéderek térfogata egyenlő.
- Ha egy poliédert részpoliéderekre vágunk szét, akkor a részek térfogatának összege egyenlő az egész poliéder térfogatával.

Poliéderektől különböző testek térfogata:

A test által tartalmazott, illetve a testet tartalmazó poliéderek térfogataival a kétoldali közelítés módszerével határozható meg. Ha egyetlen olyan pozitív valós szám van, amely az adott testet tartalmazó poliéderek térfogatainál nem nagyobb, valamint az adott test által tartalmazott poliéderek térfogatánál nem kisebb, akkor azt a test térfogatának tekintjük.

Forgástestek térfogata:

TÉTEL: Ha $f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumon folytonos és $f(x) \geq 0$, akkor az $f(x)$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

TÉTEL: Az r sugarú gömb térfogata: $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$

BIZONYÍTÁS: A gömb származtatható egy félkör átmérő körüli megforgatásával, ezért térfogata a $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$ összefüggéssel meghatározható.

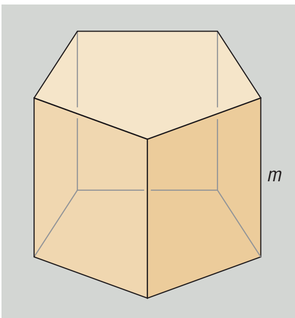
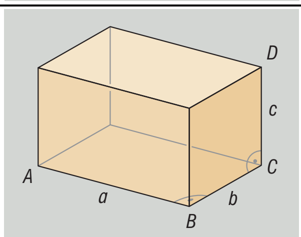
Az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete $x^2 + y^2 = r^2$, ebből a $[-r; r]$ intervallumon értelmezett $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ függvény grafikonja egy félkör, melynek x tengely körüli megforgatásával származtatható az r sugarú gömb. Így a gömb térfogata:

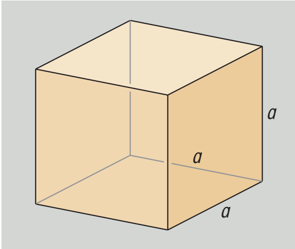
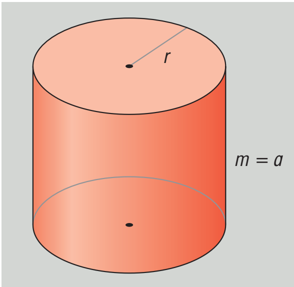
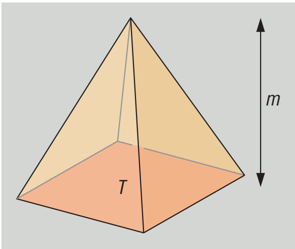
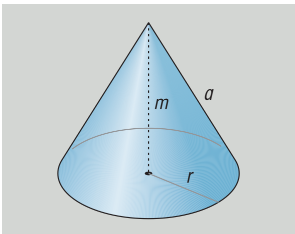
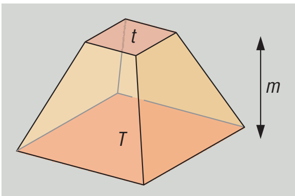
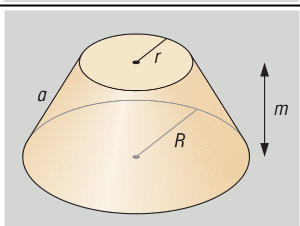
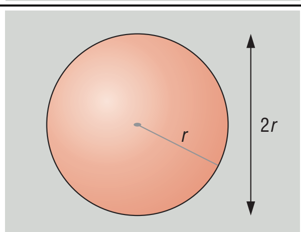
$$V = \pi \int_{-r}^{r} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \left[\left(r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3} \right) - \left(r^2 \cdot (-r) - \frac{(-r)^3}{3} \right) \right] = \pi \left[\frac{2}{3} \cdot r^3 - \left(-\frac{2}{3} \cdot r^3 \right) \right] = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3$$

TÉTEL: Hasonló testek térfogatának aránya megegyezik a hasonlóság arányának köbével.

V. Testek felszíne és térfogata

Test		Felszín	Térfogat
Hasáb		$A = 2T_{\text{alap}} + T_{\text{palást}}$	$V = T_{\text{alap}} \cdot m$
Téglatest		$A = 2(ab + bc + ca)$	$V = abc$

Test		**Felszín**	**Térfogat**
Kocka		$A = 6a^2$	$V = a^3$
Henger		$A = 2r\pi(r + a)$	$V = r^2\pi m$
Gúla		$A = T_{alap} + T_{palást}$	$V = \dfrac{T_{alap} \cdot m}{3}$
Kúp		$A = r\pi(r + a)$	$V = \dfrac{r^2\pi m}{3}$
Csonka gúla		$A = T + t + T_{palást}$	$V = \dfrac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right)$
Csonka kúp		$A = \pi(R^2 + r^2 + (R + r)a)$	$V = \dfrac{m\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$
Gömb		$A = 4r^2\pi$	$V = \dfrac{4r^3\pi}{3}$

TÉTEL: Egy r sugarú, a alkotójú kúp felszíne $A = r\pi(r + a)$

BIZONYÍTÁS: A kúp palástja kiteríthető síkba, alakja olyan körcikk, amelynek sugara a kúp alkotója, ívhossza az alapkör kerülete. Így a palást területe:

$$T_{\text{palást}} = \frac{\text{sugár} \cdot \text{ív}}{2} = \frac{a \cdot 2r\pi}{2} = ar\pi$$

Így a forgáskúp teljes felszíne $A = r^2\pi + ar\pi = r\pi(r + a)$.□

VI. Alkalmazások

- Térképészetben, földmérésben: távolságmérés, szögmérés
- Építészmérnöki munkában: távolságmérés, szögmérés, felszín-, térfogatszámítás
- Fizikában sűrűségszámításkor: térfogatszámítás
- Geometriai valószínűség számolásakor: ha az esemény bekövetkezésének valószínűsége arányos az eseményt szemléltető geometriai alakzat mértékével, akkor az esemény bekövetkezésének valószínűségét megkapjuk, ha az eseményt és az eseményteret szemléltető alakzatok mértékeit elosztjuk egymással (felszín, térfogat)

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A legkorábbi írásos emlékek a hengerszerű testekről Kr.e. 2000 körül keletkeztek. Ezek szerint Egyiptomban henger alakú gabonatartályok térfogatát meg tudták határozni.
- Kr.e. 325 körül **Euklidesz** megírta Elemek című művét, amiben a geometriát axiomatikusan építette fel, azaz a szemléletre hagyatkozva alapfogalmakat (axiómákat) határozott meg, és ezek segítségével bizonyított állításokat. A hasábok, gúlák, gömb térfogatának vizsgálatára a kimerítés módszerét (beírt és körülírt hasábok térfogatával való közelítést) használta. Vizsgálta az öt szabályos testet, meghatározta térfogatukat, bebizonyította, hogy csak öt szabályos test létezik.
- **Arkhimédész** (Kr.e III.sz.) bebizonyította, hogy a gömb felszíne megegyezik a köré írt hengerpalást területével, és a térfogata a köré írt henger térfogatának 2/3 része. Egy másik nevezetes tétele szerint az egyenlő oldalú henger, a bele írható gömb és a hengerbe írható kúp térfogatainak aránya 3:2:1.
- **Heron** Kr.e. I. században élt görög matematikus síkidomok területének és testek térfogatának kiszámításával is foglalkozott.
- **Janus Pannonius** (1434–1472) magyar költő szépen körülírta a térelemeket, amelyeket a matematikában nem definiálunk.
  Janus Pannonius: A geometriai idomokról
  „Pont az, melynek részét felfogni sem tudnád, megnyújtod, s karcsú egyenes fut bármely irányban. Sík felület születik, ha meg is duplázza futását: széltében terjed,nem nyílik meg soha mélye. Két-két sík a szilárd testet jellemzi, kiadja hosszúságát és szélességét, meg a mélyét. Kockának, köbnek hívják s négyzetlapú testnek, bárhogy esik, midig jól látni a részeit ennek; hat síkot foglal magába, a szöglete épp nyolc” (Kurcz Ágnes fordítása)
- **Császár Ákos** 1949-ben készített egy olyan testet, amelynek bármely két csúcspontja szomszédos. A Császár-poliédernek 7 csúcsa, 14 háromszöglapja és 21 éle van (ez nem egyszerű poliéder)
- **Szilassi Lajos** szegedi matematikus 1977-ben olyan testet készített, amelynek hét lapja van, és bármely két lapja szomszédos. A Szilassi-féle poliédert elkészítették rozsdamentes acélból és Fermat francia matematikus szülőházában, születésének 400. évfordulóján avatták fel.

21. A terület fogalma. Területszámítás elemi úton és az integrálszámítás felhasználásával.

Vázlat:

I. Területszámítás
II. Síkidomok területe: téglalap, paralelogramma, háromszög, trapéz, deltoid, négyszögek, sokszögek, kör
III. Határozott integrál
IV. Görbe alatti terület
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás

I. Területszámítás

A **mérés** egy egységnyinek tekintett értékkel való összehasonlítást jelent. Ahhoz, hogy mérni tudjunk, rögzíteni kell a mérés szabályait.

DEFINÍCIÓ: A **terület** mérése azt jelenti, hogy minden síkidomhoz hozzárendelünk egy pozitív valós számot, amelyet a síkidom területének nevezünk. Ez a hozzárendelés az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:
- Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területe egységnyi.
- Egybevágó sokszögek területe egyenlő.
- Ha egy sokszöget véges számú sokszögre darabolunk, akkor az egyes részek területének összege egyenlő az eredeti sokszög területével.

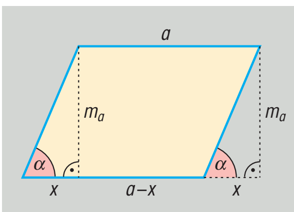
II. Síkidomok területe

Bebizonyítható, hogy ilyen területértelmezés mellett igazak a következő állítások:

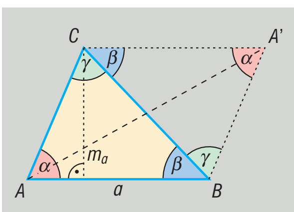
TÉTEL: A **téglalap területe** két szomszédos oldalának szorzatával egyenlő. $t = a \cdot b$.

Minden paralelogramma átdarabolható téglalappá, így

TÉTEL: a **paralelogramma területe**: $t = a \cdot m_a$.



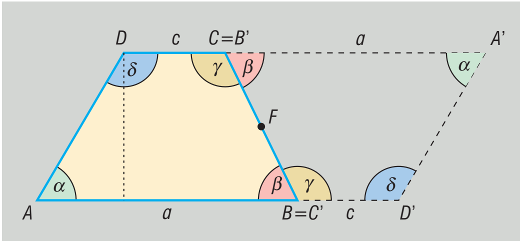
Minden háromszöget valamely oldalának felezőpontjára tükrözve az eredeti háromszög és (az eredetivel egybevágó) képe együtt egy paralelogrammát alkot, így a paralelogramma területének a fele



TÉTEL: a **háromszög területe**: $t=\frac{a\cdot m_a}{2}$.

Tükrözve bármely trapézt az egyik szárának felezőpontjára olyan paralelogrammát kapunk, amelynek területe kétszerese a trapéz területének.

TÉTEL: A **trapéz területe** az alapok számtani közepének és a trapéz magasságának szorzata: $t=\frac{a+c}{2}\cdot m$.

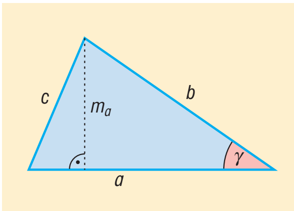


Minden sokszög véges számú háromszögre darabolható, így

TÉTEL: a **sokszög területe** egyenlő ezeknek a háromszögeknek a területösszegével.

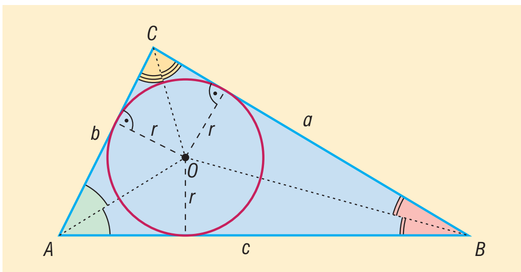
TÉTEL: Háromszög területei: $t=\frac{a\cdot m_a}{2}=\frac{a\cdot b\cdot \sin\gamma}{2}=r\cdot s=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$

ahol r a beírt kör sugara, R a körülírt kör sugara, s a félkerület.



TÉTEL: $t=r\cdot s$.

BIZONYÍTÁS: A háromszög beírt körének középpontja a szögfelezők metszéspontja.

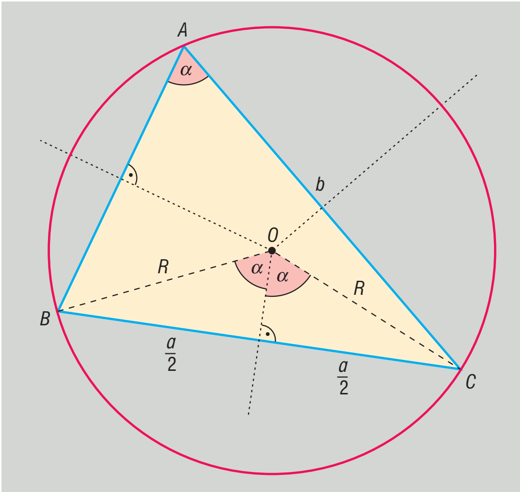


Berajzoljuk a szögfelezőket, így ABC háromszöget felbontjuk három db háromszögre: ABO, BCO és CAO háromszögekre, mindhárom háromszögben az egyik oldalhoz tartozó magasság r. Így felírható az eredeti háromszög területe a részháromszögek területének összegével.

$$t_{ABC\triangle}=t_{ABO\triangle}+t_{BCO\triangle}+t_{CAO\triangle}=\frac{c\cdot r}{2}+\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}=r\cdot\frac{a+b+c}{2}=r\cdot s.\square$$

TÉTEL: $t=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$.

BIZONYÍTÁS: A háromszög körülírt körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.



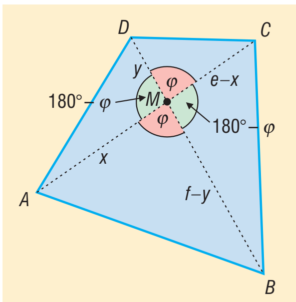
Ha CAB kerületi szög α, akkor COB középponti szög 2α (ugyanahhoz az ívhez tartoznak).

COB egyenlő szárú háromszög $\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{\frac{a}{2}}{R} = \dfrac{a}{2R}$.

$$t = \frac{b\cdot c\cdot \sin\alpha}{2} = \frac{b\cdot c\cdot \frac{a}{2R}}{2} = \frac{a\cdot b\cdot c}{4R}. \square$$

TÉTEL: Négyszög területe: az átlói hossza és az átlók által bezárt szög szinuszának a szorzatának fele: $t = \dfrac{e\cdot f\cdot \sin\varphi}{2}$.

BIZONYÍTÁS: Az $ABCD$ konvex négyszög, átlóinak metszéspontja M. M az átlókat x, $e-x$, illetve y, $f-y$ részekre osztja. A két átló 4 db háromszögre osztja a négyszöget, így a négyszög területe egyenlő a négy háromszög területének összegével:



$$t_{ABCD} = t_{ABM\triangle} + t_{BCM\triangle} + t_{CDM\triangle} + t_{DAM\triangle}$$

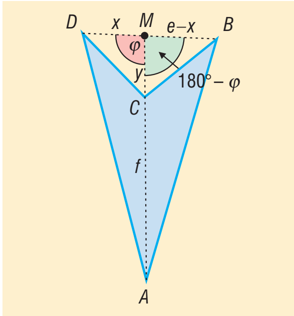
$$t = \frac{x\cdot(f-y)\cdot\sin\varphi}{2} + \frac{(e-x)\cdot(f-y)\cdot\sin(180^\circ-\varphi)}{2} + \frac{(e-x)\cdot y\cdot\sin\varphi}{2} + \frac{y\cdot x\cdot\sin(180^\circ-\varphi)}{2}$$

$\sin(180^\circ-\varphi) = \sin\varphi$, mert $0^\circ < \varphi < 180^\circ$, ekkor $\dfrac{\sin\varphi}{2}$-t kiemelve:

$$t = \frac{\sin\varphi}{2}\cdot\left[x\cdot(f-y)+(e-x)\cdot(f-y)+(e-x)\cdot y + y\cdot x\right] = \frac{\sin\varphi}{2}\cdot\left[(f-y)\cdot e + y\cdot e\right] =$$

$$= \frac{\sin\varphi}{2}\cdot[f-y+y]\cdot e = \frac{\sin\varphi}{2}\cdot f\cdot e = \frac{e\cdot f\cdot\sin\varphi}{2}. \square$$

ABCD konkáv négyszög, átlóinak metszéspontja M a virtuális átlót x, $e-x$ részekre osztja, míg a valódi átló: $CA = AM - CM$.



Az *ABD* háromszög területe egyenlő az *ABCD* négyszög területének és a *BCD* háromszög területének összegével

$$t_{ABCD} = t_{ABD\triangle} - t_{BCD\triangle} = t_{ABM\triangle} + t_{AMD\triangle} - t_{CBM\triangle} - t_{CMD\triangle}. \square$$

TÉTEL: a deltoid területe az átlói szorzatának a fele

TÉTEL: Szabályos sokszög területét úgy kapjuk, hogy középpontjukat összekötjük a csúcsokkal és így n db egyenlő szárú háromszögre bontjuk a sokszöget:

$$t = n \cdot \frac{a \cdot r}{2} = n \cdot \frac{R^2 \cdot \sin\frac{360°}{n}}{2},$$

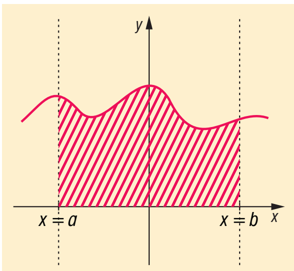
ahol r: a beírt kör sugara, R: körülírt kör sugara.

TÉTEL: *r* sugarú kör területe: $r^2\pi$ (sorozatok határértékével)

III. Határozott integrál:

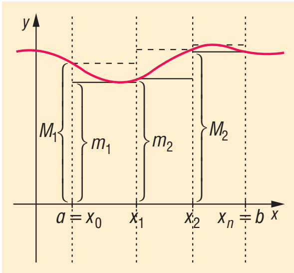
A határozott integrál segítségével, függvénygörbe vonalával határolt síkidomok területét is meg tudjuk határozni. Ehhez először a **görbe alatti terület**et kell vizsgálnunk.

DEFINÍCIÓ: Görbe alatti területnek nevezzük egy $[a; b]$ intervallumon folytonos, korlátos, pozitív értékű f függvény görbéjének az intervallumhoz tartozó íve, az $x = a$, az $x = b$ egyenesek és az x tengely által határolt területet.



DEFINÍCIÓ: A görbe alatti területet téglalapok egyesítésével létrejött sokszögekkel közelítjük. Ehhez az $[a; b]$ intervallumot az $a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_n = b$ pontokkal n részre osztjuk. Ezt az intervallum egy **felosztás**ának nevezzük.

Tekintsük ennek a felosztásnak az intervallumát: $[x_{i-1}; x_i]$. Jelölje m_i az f függvénynek ebben az intervallumban felvett értékeinek **alsó határ**át (az alsó korlátok közt a legnagyobb), M_i pedig a **felső határ**át (a felső korlátok közt a legkisebb). Bizonyítható, hogy korlátos függvényeknél ezek az értékek léteznek.



Az $[x_{i-1}; x_i]$ intervallum fölé szerkesszünk olyan téglalapokat, amelyeknek másik oldala m_i, illetve M_i. Végezzük el a szerkesztést a felosztás minden intervallumában és egyesítsük a kisebb téglalapokat és a nagyobb téglalapokat külön két sokszögbe. Ekkor a vizsgált tartomány egy **beírt**, illetve egy **körülírt sokszög**ét kapjuk. Ezeknek a sokszögeknek a területét vizsgáljuk.
A beírt sokszög területe az **alsó közelítő összeg**:

$$s_n = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}).$$

A körülírt sokszög területe a **felső közelítő összeg**:

$$S_n = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}).$$

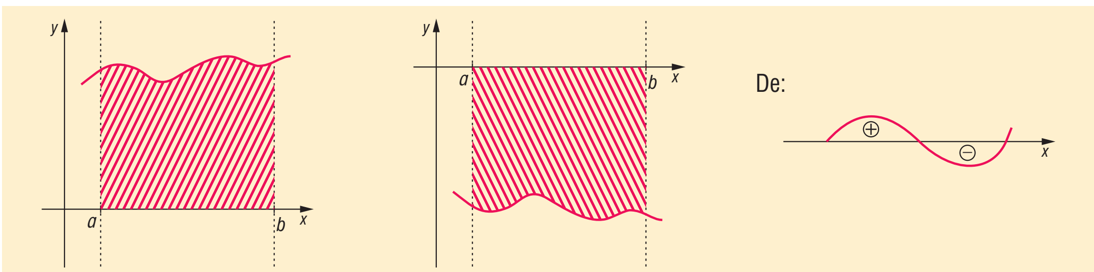
További osztópontokat véve a meglévőkhöz a felosztást finomítjuk, akkor s_n általában nő, S_n általában csökken, és ekkor a leghosszabb részintervallumok hossza is 0-hoz tart.
Így végtelen sok alsó és felső összeg keletkezik. Belátható, hogy bármely alsó összeg nem lehet nagyobb bármely felső összegnél.

DEFINÍCIÓ: Az $[a; b]$ intervallumon korlátos, f függvény integrálható, ha bármely, minden határon túl finomodó felosztássorozatához tartozó alsó és felső összegei sorozatának közös határértéke van, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Ezt a közös határértéket nevezzük az f függvény $[a; b]$ intervallumon vett **határozott integrál**jának. Jelölés: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

IV. Görbe alatti terület

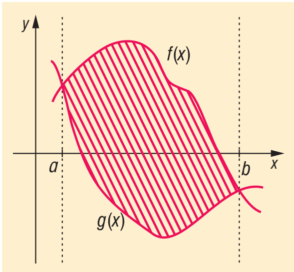
Így tehát nemnegatív, integrálható függvények határozott integrálja megadja a **függvény alatti terület**et.
Az integrál területszámítási alkalmazásánál figyelembe kell venni, hogy az x tengely alatti terület negatív előjellel adódik.

TÉTEL: Ha az $[a; b]$-on folytonos f függvény nem vált előjelet, akkor $x = a$, $x = b$, és **az x tengely és a függvény grafikonja által közrezárt síkidom területe**: $t = \left| \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right|$.



TÉTEL: Két függvény által közrezárt síkidom területe:

$$t=\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x \quad (\text{ha } f(x)>g(x))$$



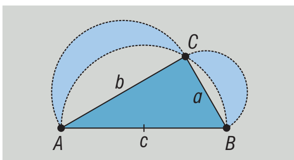
Ilyenkor általában a két függvény metszéspontját kell először meghatározni. Majd a két függvény különbségét kell integrálni, a legvégén pedig a Newton-Leibniz formulával kiszámolni a határozott integrál értékét.

V. Alkalmazások:

- Pitagorasz-tétel bizonyítása terület-összerakással
- Geometriai valószínűségek kiszámításakor szükség van geometriai alakzatok területének meghatározására
- Kör területe
- Síkidomokkal, illetve síkba kiteríthető felületekkel határolt testek felszínének meghatározása (hasáb, henger, kúp, gúla, csonka kúp, csonka gúla)

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Síkidomok területével már az ókorban is foglalkoztak: **Hippokratész** Kr.e. 450 körül egy rendszerező matematikai művet írt, melyben sokat foglalkozott különböző egyenesek és körívek által meghatározott területek kiszámításával.
- **Hippokratész** „holdacskái”: A derékszögű háromszög oldalai fölé rajzoljunk félköröket. Ekkor a két „holdacska” területének összege egyenlő a háromszög területével.



- Kb. 150 évvel később **Arkhimédész** műveiben is találunk a területszámításról említést: ő is a kimerítés módszerét használta (körülírt és beírt téglalapok területével való közelítés).
- **Riemann** (1826–1866) német matematikus fejlesztette ki a róla elnevezett integrálást. A határozott integrál definíciója pontosítva: Riemann szerint integrálható…
- **Leibniz** (1646–1716) német és **Newton** (1642–1727) angol matematikusok egymástól függetlenül felfedezték a differenciál- és integrálszámítást. A mai jelölések többnyire Leibniztől származnak: a differenciálhányados $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ és az integrál $\left(\int \mathrm{d}x\right)$ jele. Ő használta először a függvény, a differenciálszámítás, az integrálszámítás elnevezéseket. Newton Leibniz előtt dolgozta ki mindkét számítást, de nem tette közzé, jelölésrendszere is bonyolultabb volt, mint Leibnizé, így az utókor a Leibniz-féle elveket fogadta el. A határozott integrál kiszámításának képletét mindkettejük munkásságának elismeréseként nevezzük Newton-Leibniz formulának.

22. Kombinációk. Binomiális tétel, a Pascal háromszög. A valószínűség kiszámításának kombinatorikus modellje. A hipergeometrikus eloszlás

Vázlat:

I. Kombinációk (ismétlés nélküli, ismétléses)
II. Binomiális tétel, a Pascal háromszög
III. Események: elemi események, eseménytér, biztos-, lehetetlen esemény
IV. Műveletek eseményekkel ($A + B$, $A \cdot B$, $\overline{A}$)
V. Valószínűség definíciója, műveletek valószínűsége, axiómák
VI. Hipergeometrikus eloszlás
VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás

I. Kombinációk (ismétlés nélküli, ismétléses)

A **kombinatorika**, a valószínűség-számítás és a matematikai statisztika a véletlen tömegjelenségek törvényszerűségével foglalkozik. A kombinatorika tárgyát képezik a sorba rendezési és a részhalmaz kiválasztási problémák, a kombinatorika rendszerint dolgok megszámlálásával foglalkozik.

DEFINÍCIÓ: Legyen n egymástól különböző elemünk. Ha ezekből k ($k \le n$) db-ot kiválasztunk minden lehetséges módon úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, azaz n elem k-ad osztályú **ismétlés nélküli kombináció**ját kapjuk.

TÉTEL: Az n elem k-ad osztályú az ismétlés nélküli kombinációinak száma:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

BIZONYÍTÁS: A kiválasztást úgy képzelhetjük el, mintha először sorba állítanánk a k db kiválasztott elemet. Az első helyre n db-ból, a második helyre $(n-1)$ db-ból, a k-adik helyre már csak a megmaradt $(n-k+1)$ db-ból választhatunk, ezzel a lehetőségek száma $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. Majd a sorrendek számát a k elem összes sorrendjével, $k!$-ral osztjuk, hiszen a sorrend nem számít.

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Erre pedig bevezetjük az $\binom{n}{k}$ szimbólumot. □

DEFINÍCIÓ: Ha n különböző elemből kell k elemet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít és a már kiválasztott elemeket újra kiválaszthatjuk, akkor az n elem k-ad osztályú **ismétléses kombináció**ját kapjuk.

TÉTEL: Az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációjának száma: $\binom{n+k-1}{k}$.

II. Binomiális tétel

TÉTEL: $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$.

A tételben szereplő $\binom{n}{k}$ együtthatókat binomiális együtthatóknak nevezzük.

BIZONYÍTÁS: $(a + b)^n = (a + b)(a + b)(a + b)...(a + b)$.

Bontsuk fel a jobb oldalon álló n darab zárójelet: mindegyik összegből ki kell választani az egyik tagot, ezeket a tagokat össze kell szorozni, majd a kapott szorzatokat össze kell adni. Mindegyik kapott szorzat n tényezőből áll, mindegyikben szerepel a és b, mégpedig $a^{n-k} \cdot b^k$ alakban, mert a zárójelből vagy a-t, vagy b-t választunk, a-ból $n - k$ darabot, b-ből k darabot.

$\binom{n}{k}$-féleképpen lehet az n darab tényezőből azt a k darabot kiválasztani, amelyikből a b szorzótényezőt vesszük. Tehát az $a^{n-k} \cdot b^k$ tagból $\binom{n}{k}$ darab van, tehát ez a tag együtthatója.

Így a szorzat a tételbeli alakba írható.□

A binomiális együtthatók tulajdonságai:

- 0! a definíció szerint 1, ezért $\binom{n}{n} = 1$ és $\binom{n}{0} = 1$.
- Az n elem közül ugyanannyiféleképpen lehet k elemet kiválasztani, mint $n - k$ elemet otthagyni, így $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

A binomiális tétel következménye:

Ha az összeg mindkét tagja 1, akkor

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Pascal háromszög:

A háromszögben a sorok számozása nullával kezdődik, a páratlan és a páros sorokban a számok el vannak csúsztatva egymáshoz képest. A háromszöget a következő egyszerű módon lehet felírni: A nulladik sorban csak egy darab1-es van. A következő sorok felírásánál a szabály a következő: az új számot úgy kapjuk meg, ha összeadjuk a felette balra és felette jobbra található két számot. Ha az összeg valamelyik tagja hiányzik (sor széle), akkor nullának kell tekinteni. Például az 1-es sor első száma 0 + 1 = 1, míg a 2-es sor középső száma 1 + 1 = 2.

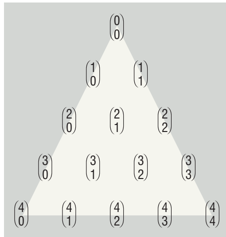
Ez a meghatározás Pascal képletén alapul, amely szerint az n-edik sor k-adik eleme a következő képlettel számolható: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ bármely nem negatív egész n és bármely 0 és n közötti k egész esetében.

A Pascal-háromszög szimmetriája miatt is látható, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

A meghatározásból látszik, hogy az n-edik sorban a kéttagú összeg n-edik hatványának együtthatói, azaz a binomiális együtthatók állnak.

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$
$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$$
$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$$
$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 b + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1



III. Események

A valószínűség-számítás véletlen tömegjelenségek vizsgálatával foglalkozik.

DEFINÍCIÓ: Véletlen jelenségnek nevezzük azokat a jelenségeket, amelyeket a leírható körülmények nem határozzák meg egyértelműen.
Pl. egy dobókocka feldobása.

DEFINÍCIÓ: Kísérletnek nevezzük a véletlen jelenség megfigyelését.

DEFINÍCIÓ: Elemi eseménynek nevezzük a kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteleket.
Pl. a kocka dobásánál azt, hogy hányas számot dobunk.

DEFINÍCIÓ: Az **eseménytér** az elemi események halmaza.
Pl. a kocka dobásánál $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

DEFINÍCIÓ: Az elemi események egy halmazát, azaz az eseménytér egy részhalmazát **esemény**nek nevezzük.
Pl. esemény a kockadobásnál páros szám dobása.
Az eseményeket nagybetűvel jelöljük. Pl. $A = \{2; 4; 6\}$

DEFINÍCIÓ: Az eseménytérhez tartozó azon esemény, amely biztosan bekövetkezik, a **biztos esemény**, amely semmiképpen sem következhet be, a **lehetetlen esemény**.
A biztos esemény jele: H, a lehetetlen esemény jele: $\emptyset$.
Pl. a kockadobásnál biztos esemény: 7-nél kisebb számot dobunk, lehetetlen esemény: 8-nál nagyobbat dobunk.

IV. Műveletek eseményekkel

DEFINÍCIÓ: Az A **esemény komplementere** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A nem következik be. Jele: $\overline{A}$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események összege** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A vagy B bekövetkezik. Jele: $A + B$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események szorzata** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A és B bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események egymást kizárják**, ha egyszerre nem következhetnek be.

Az eseményekkel kapcsolatos műveletek tulajdonságai, azonosságai a halmazműveletekre megismert tételekhez hasonlóan leírhatók, illetve bizonyíthatók.

V. A valószínűség-számítás alapjai

DEFINÍCIÓ: Ha elvégzünk n-szer egy kísérletet, és ebből az A esemény k-szor következik be, akkor **az A esemény relatív gyakorisága** a $\frac{k}{n}$ hányados.

DEFINÍCIÓ: Ha sokszor elvégzünk egy kísérletet, akkor megfigyelhetjük, hogy egy A esemény relatív gyakorisága egy szám körül ingadozik. Ezt a számot nevezzük **az A esemény valószínűségé**nek. Jele: $P(A)$.

DEFINÍCIÓ: A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az A esemény valószínűsége: $P(A)=\frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$.

A valószínűség-számítás axiómái:

- Tetszőleges A esemény esetén $0 \le P(A) \le 1$.
- Biztos esemény valószínűsége 1, lehetetlen eseményé 0.
- Ha A és B egymást kizáró események, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
- Ha A és B tetszőleges esemény, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

DEFINÍCIÓ: Az A esemény B-re vonatkozó **feltételes valószínűsége**: $P(A\mid B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}$.

Ez annak a valószínűsége, hogy az A esemény bekövetkezik, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezik.

DEFINÍCIÓ: Az A és B események **egymástól függetlenek**, ha $P(A \mid B) = P(A)$.

Ekkor $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

DEFINÍCIÓ: Ha egy esemény előfordulását geometriai alakzat (vonal, síkidom, test) mértékével jellemezzük, és az esemény bekövetkezésének valószínűségét ezek hányadosával fejezzük ki, akkor **geometriai valószínűség**ről beszélünk.

VI. Diszkrét eloszlások:

A kísérletek kimenetelei általában számokkal jellemezhetők. Ezekre a mennyiségekre jellemző, hogy értékük a véletlentől függ, és mindegyikük egy-egy eseményhez van hozzárendelve.

DEFINÍCIÓ: A **valószínűségi változó** az eseménytéren értelmezett valós értékű függvény. Jele: ξ.

DEFINÍCIÓ: Ha a valószínűségi változó lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen, akkor **diszkrét valószínűségi változó**ról beszélünk.

DEFINÍCIÓ: A visszatevés nélküli mintavétel eloszlását **hipergeometrikus eloszlás**nak nevezzük.

TÉTEL: Hipergeometrikus eloszlásnál legyen N db elemünk, amelyből M db elem rendelkezik egy adott A tulajdonsággal, $N - M$ db pedig nem. Kiválasztunk véletlenszerűen visszatevés nélkül n db-ot. Annak a valószínűsége, hogy a kihúzott n db elem közül k db rendelkezik az A tulajdonsággal:

$$P(\xi=k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ ahol } k \le n.$$

BIZONYÍTÁS: A kérdés az, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott n db elem között k db A tulajdonságú elem van.

A kombinatorikában tanultak szerint a kedvező esetek száma $\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}$, mert M db-ból kell k db-ot kiválasztani, amit $\binom{M}{k}$-féleképpen tehetünk meg, és a maradék $N-M$ db-ból $n-k$ db-ot kell kiválasztanunk, amit $\binom{N-M}{n-k}$-féleképpen tehetünk meg.

Az összes esetek száma: $\binom{N}{n}$, mert N db-ból kell n db-ot választani.

Ezt felhasználva kapjuk: $P(\xi=k)=\dfrac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. □

TÉTEL: A hipergeometrikus eloszlásnál az A tulajdonságú elemek számának várható értéke:

$$M(\xi)=n\cdot p=n\cdot\frac{M}{N}$$

VII. Alkalmazások

Kiválasztási problémák:
- Hányféleképpen lehet kitölteni egy lottószelvényt?
- Egy n elemű halmaznak hány darab k elemű részhalmaza van?

Binomiális együtthatók, Pascal-háromszög:
- A **Galton**-deszka egy olyan egyenlő szárú háromszög alakú szerkezet, amelyben úgy vannak elhelyezve akadályok és útvonalak, hogy minden akadálynál egyenlő eséllyel (0,5) térhet el jobba, illetve balra a lefele guruló golyó. A golyó a Galton-deszka egyes rekeszeibe a Pascal-háromszögben szereplő binomiális együtthatók alapján érkezik.

Klasszikus valószínűségi modell:
- Szerencsejátékoknál nyerési esély megállapítása
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón, a hatoslottón telitalálatos szelvényünk lesz?

Matematikatörténeti vonatkozások:
- A Pascal háromszöghöz hasonló háromszöget alkotott **Csu Si-csie** a 12. századi Kínában, hasonló háromszögeket készítettek indiai, perzsa, itáliai matematikusok.
- **Pascal** (1623–1662) francia matematikus a binomiális együtthatókat tanulmányozva módszert adott a kiszámításukra és megalkotta Pascal-áromszöget.
- Először **Leibniz** (1646–1716) német matematikus rendszerezte a kombinatorikai ismereteket.
- **Bernoulli** (1654–1705) svájci matematikus alkalmazta először a kombinatorikai ismereteket valószínűség kiszámítására, jelentősen hozzájárult a valószínűségelmélet kifejlesztéséhez.

23. Permutációk, variációk. A binomiális eloszlás. A valószínűség kiszámításának geometriai modellje.

Vázlat:

I. Permutációk
II. Variációk
III. A valószínűségszámítás alapjai
IV. A binomiális eloszlás
V. A valószínűség kiszámításának geometriai modellje
VI. Alkalmazások, matematika[S1]történeti vonatkozások

Kidolgozás:

A **kombinatorika**, a valószínűség-számítás és a matematikai statisztika a véletlen tömegjelenségek törvényszerűségével foglalkozik. A kombinatorika tárgyát képezik a sorba rendezési és a részhalmaz kiválasztási problémák, a kombinatorika rendszerint dolgok megszámlálásával foglalkozik.

I. Permutációk:

DEFINÍCIÓ: Egy adott n elemű halmaz elemeinek egy **ismétlés nélküli permutáció**ján az n különböző elem egy sorba rendezését (sorrendjét) értjük.

TÉTEL: Egy ***n* elem**ű halmaz **ismétlés nélküli összes permutációinak száma**:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

DEFINÍCIÓ: Ha az n elem között van $k_1, k_2, \ldots, k_m$ egymással megegyező, akkor az elemek egy sorba rendezését **ismétléses permutáció**nak nevezzük.

TÉTEL: Ha n elem között $k_1, k_2, \ldots, k_m$ db megegyező van, és $k + k_2 + \ldots + k_m = n$, akkor ezeket az elemeket $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$ különböző módon lehet sorba rendezni, ez az **ismétléses permutációk száma**.

II. Variációk:

DEFINÍCIÓ: Legyen n db egymástól különböző elemünk. Ha ezekből k ($k \le n$) db-ot kiválasztunk minden lehetséges módon úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít, akkor az n elem k-ad osztályú **ismétlés nélküli variáció**ját kapjuk.

TÉTEL: Az *n* elem *k*-ad osztályú ismétlés nélküli variációk száma: $\frac{n!}{(n-k)!}$.

BIZONYÍTÁS: Vegyünk egy k rekeszes dobozt. Ebben helyezzünk el az n elem közül k db elemet minden lehetséges módon.
Az első rekeszbe az n elem bármelyike tehető. A második rekeszbe már csak $(n-1)$ elem közül választhatunk. Ez $(n-1)$-féle kitöltést ad a 2. rekesz számára. Az első két rekeszbe $n(n-1)$-féleképpen tehetők az elemek. Minden rekeszbe 1-gyel kevesebb elem közül vá-

laszthatunk, mint az előzőbe. A k-adik rekeszbe $n-(k-1)=n-k+1$ elem közül választhatunk.

A doboz teljes kitöltésére összesen $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ lehetőség adódik. Ha az eredményt $(n-k)!$-ral bővítjük, akkor

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!}\square$$

DEFINÍCIÓ: Legyen n db egymástól különböző elemünk. Ha ezekből kiválasztunk k db-ot minden lehetséges módon úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít és ugyanazt az elemet többször is választhatjuk, akkor az n elem k-ad osztályú **ismétléses variáció**ját kapjuk.

TÉTEL: Az n elem k-ad osztályú ismétléses variációk száma: n^k.

III. A valószínűségszámítás alapjai:

A valószínűségszámítás a véletlen tömegjelenségek bekövetkezésének esélyének vizsgálatával foglalkozik.

DEFINÍCIÓ: **Véletlen jelenség**nek nevezzük azokat a jelenségeket, amelyeket a leírható körülmények nem határoznak meg egyértelműen.
Pl. egy dobókocka feldobása.

DEFINÍCIÓ: **Kísérlet**nek nevezzük a véletlen jelenség megfigyelését.

DEFINÍCIÓ: **Elemi esemény**nek nevezzük a kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteleket.
Pl. a kocka dobásánál azt, hogy hányas számot dobunk.

DEFINÍCIÓ: Az **eseménytér** az elemi események halmaza.
Pl. a kocka dobásánál $\{1;\,2;\,3;\,4;\,5;\,6\}$.

DEFINÍCIÓ: Az elemi események egy halmazát, azaz az eseménytér egy részhalmazát **esemény**nek nevezzük.
Pl. esemény kockadobásnál páros szám dobása.
Az eseményeket nagybetűvel jelöljük. Pl. $A=\{2;\,4;\,6\}$

DEFINÍCIÓ: Az eseménytérhez tartozó azon esemény, amely biztosan bekövetkezik, a **biztos esemény**, amely semmiképpen sem, következhet be, a **lehetetlen esemény**.
A biztos esemény jele: H, a lehetetlen esemény jele: $\emptyset$.
Pl. a kockadobásnál biztos esemény: 7-nél kisebb számot dobunk, lehetetlen esemény: 8-nál nagyobbat dobunk.

DEFINÍCIÓ: Ha elvégzünk n-szer egy kísérletet, és ebből az A esemény k-szor következik be, akkor **az A esemény relatív gyakorisága** a $\frac{k}{n}$ hányados.

DEFINÍCIÓ: Ha sokszor elvégzünk egy kísérletet, akkor megfigyelhetjük, hogy egy A esemény relatív gyakorisága egy szám körül ingadozik. Ezt a számot nevezzük **az A esemény valószínűségé**nek. Jele: $P(A)$.

DEFINÍCIÓ: A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az A esemény valószínűsége: $P(A)=\dfrac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$.

A valószínűség-számítás axiómái:

- Tetszőleges A esemény esetén $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Biztos esemény valószínűsége 1, lehetetlen eseményé 0.
- Ha A és B egymást kizáró események, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
- Ha A és B tetszőleges esemény, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

DEFINÍCIÓ: Az A esemény B-re vonatkozó **feltételes valószínűség**e: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)}$.

Ez annak a valószínűsége, hogy az A esemény bekövetkezik, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezik.

DEFINÍCIÓ: Az A és B események **egymástól függetlenek**, ha $P(A \mid B) = P(A)$.
Ekkor $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

IV. Diszkrét eloszlások:

A kísérletek kimenetelei általában számokkal jellemezhetők. Ezekre a mennyiségekre jellemző, hogy értékük a véletlentől függ, és mindegyikük egy-egy eseményhez van hozzárendelve.

DEFINÍCIÓ: A **valószínűségi változó** az eseménytéren értelmezett valós értékű függvény. Jele: ξ.

DEFINÍCIÓ: Ha a valószínűségi változó lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen, akkor **diszkrét valószínűségi változó**ról beszélünk.

DEFINÍCIÓ: A **binomiális eloszlás** olyan kísérletnél fordul elő, amelynek csak két kimenetele lehetséges: az A esemény p valószínűséggel bekövetkezik, vagy $1 - p$ valószínűséggel nem következik be.

TÉTEL: Binomiális eloszlásnál ha a kísérletet n-szer ismételjük, akkor annak valószínűsége, hogy az A esemény k-szor következik be, éppen

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \text{ ahol } k \leq n.$$

(Binomiális eloszlásra vezetnek a visszatevéses mintavétel esetei, ahol n elem közül p valószínűséggel választunk valamilyen tulajdonsággal rendelkezőt oly módon, hogy a kivett elemet az újabb húzás előtt visszatesszük.)

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy a visszatevéses mintavételeknél N db elem közül választunk ki n db-ot. Legyen M db elem A tulajdonságú, $N - M$ db elem $\overline{A}$ tulajdonságú.
A visszatevéses mintavétel azt jelenti, hogy minden egyes húzás után visszatesszük a kihúzott elemet, így a húzások egymástól függetlenek lesznek. A kérdés az, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott n db elem között k db A tulajdonságú elem van.
A kombinatorikában tanultak szerint a kedvező esetek száma $\binom{n}{k} \cdot M^k \cdot (N-M)^{n-k}$, mert k-szor kell M db golyóból választanunk, $n - k$-szor kell $N - M$ db golyó közül, és ez $\binom{n}{k}$-féleképpen fordulhat elő aszerint, hogy hányadik húzás az A tulajdonságú.
Az összes esetek száma N^n, mert n-szer húzunk N elemből.
Így

$$P = \frac{\binom{n}{k} \cdot M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} \cdot \frac{M^k}{N^k} \cdot \frac{(N-M)^{n-k}}{N^{n-k}} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{M}{N}\right)^k \cdot \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}.$$

Tudjuk, hogy annak az esélye, hogy A tulajdonságút húzunk: $P(A)=\frac{M}{N}=p$, hogy nem A tulajdonságút húzunk: $P(\overline{A})=1-p=1-\frac{M}{N}=\frac{N-M}{N}$.

Ezt felhasználva kapjuk: $P(\xi=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$.□

TÉTEL: A binomiális eloszlásnál az A tulajdonságú elemek számának várható értéke:

$$M(\xi)=n\cdot p=n\cdot\frac{M}{N}$$

V. A valószínűség kiszámításának geometriai modellje

Adott egy pontok alkotta geometriai alakzat. Elemi eseménynek ekkor az adott ponthalmazból az egyik pont kiválasztása, azaz ekkor az elemi eseménynek pontokat feleltetünk meg. Egy esemény azt jelenti, hogy a kiválasztott pont beletartozik egy bizonyos kijelölt részponthalmazba, résztartományba, vagyis az események ponthalmazok, tartományok. Ekkor az eseménytér egy geometriai alakzat, az esemény ezen pontok egy bizonyos tulajdonsággal rendelkező részhalmaza, az elemi esemény a geometriai alakzat egy pontja.

DEFINÍCIÓ: Ha az esemény bekövetkezésének valószínűsége arányos a részhalmaz mértékszámával, akkor geometriai valószínűségéről beszélünk.
Ekkor az A esemény valószínűsége:

$$P(A)=\frac{\text{az } A \text{ eseménynek megfelelő részalakzat mértéke}}{\text{a kísérlettel kapcsolatos teljes alakzat mértéke}}=\frac{m}{M}.$$

Ekkor a mérték lehet pl. hosszúság, terület, térfogat.

Példák:

- egy adott méretű darts táblán egy bizonyos részbe való találat valószínűsége
- két ember találkozásának valószínűsége egy bizonyos órában, ha egyikük sem vár 15 percnél többet
- meteor szárazföldre való becsapódásának valószínűsége

VI. Alkalmazások

Sorbarendezési problémák:

- Hányféleképpen lehet kitölteni egy totószelvényt?
- Sorsolások, versenyek eredményeinek sorrendjeinek lehetőségei

Binomiális eloszlás:

- meteorológiai előrejelzés,
- szerencsejátékoknál nyerési esély megállapítása: mekkora a valószínűsége annak, hogy a totón telitalálatos szelvényünk lesz?
- mintavételek a minőség-ellenőrzés során: a gyártósorokon elkészült termékek közül a selejtek számának közelítő meghatározása várható érték segítségével.
- A Galton-deszka egy olyan egyenlő szárú háromszög alakú szerkezet, amelyben úgy vannak elhelyezve akadályok és útvonalak, hogy minden akadálynál egyenlő eséllyel (0,5) térhet el jobba, illetve balra a lefele guruló golyó. A golyó a Galton-deszka egyes szintjeibe érkező valószínűsége.

Geometriai eloszlás:

- kvantumfizikában a részecske helyének meghatározása: azt lehet megmondani a részecske sebességétől függően, hogy hol tartózkodik legnagyobb valószínűséggel a részecske.

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Az első ismert valószínűségszámítási feladat az 1400-as évekből Itáliából származik.
- **Pascal** (1623–1662) francia matematikus a binomiális együtthatókat tanulmányozva módszert adott a kiszámításukra, a valószínűségszámítás egyik megalapozója volt.
- Először **Leibniz** (1646–1716) német matematikus rendszerezte a kombinatorikai ismereteket, sokat foglalkozott az elemek sorbarendezésével, szimbólumokkal írta le a folyamatokat.
- **Bernoulli** (1654–1705) svájci matematikus alkalmazta először a kombinatorikai ismereteket valószínűség kiszámítására, jelentősen hozzájárult a valószínűségelmélet kifejlesztéséhez. Kidolgozta a valószínűségszámítás kombinatorikus modelljét. Két testvére és édesapja is matematikus volt.
- **Buffon** (1707–1788) francia természettudós tűproblémájával (bevezette a geometriai valószínűség fogalmát.
- A valószínűségszámítással a 19. század végén több orosz matematikus is foglalkozott: többek között **Csebisev** (1821–1894), **Markov** (1856–1922), **Kolmogorov** (1903–1987).
- A valószínűségszámítás legfiatalabb ága, amely a számítógépek területén kapott alkalmazást, az információelmélet, melynek megalapozója **Shannon** (1916–2001) amerikai matematikus.

24. Bizonyítási módszerek és bemutatásuk tételek bizonyításában.

Vázlat:

I. Bizonyítások a matematikában
II. Direkt bizonyítás
III. Indirekt bizonyítás
IV. Teljes indukció
V. Skatulya-elv
VI. Alkalmazások

Kidolgozás

I. Bizonyítások a matematikában

A matematika különböző ágai hasonlóan épülnek fel. Meghatározunk **alapfogalmak**at, majd ezek segítségével további **fogalmak**at definiálunk. Kimondunk **alaptételek**et (axiómákat), amelyek igazságtartalmát bizonyítás nélkül, a szemlélet alapján elfogadjuk. Az axiómákból elindulva a matematikai logika eszközeivel, helyes következtetéseken keresztül további **tétel**eket bizonyítunk be.
A bizonyítás eljárási mód egy állítás helyességének indoklására a matematikai logika műveleteinek felhasználásával. A matematikai tételek általában implikációk vagy ekvivalenciák.
Az implikációk bizonyítása során a feltételből helyes matematikai következtetésekkel el kell jutni a következményhez. Bizonyítás közben a definíciókat, axiómákat, és a már bizonyított tételeket felhasználhatjuk. Így belátjuk, hogy a feltétel valóban elégséges feltétele a következménynek.
Ekvivalenciák bizonyítása során két implikációt bizonyítunk be: be kell látni, hogy mindkét állításból következik a másik.

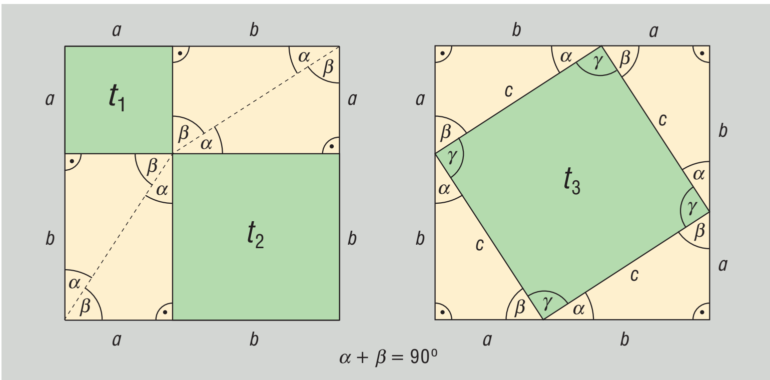
II. Direkt bizonyítás

DEFINÍCIÓ: A direkt bizonyítás során igaz állításokból (a feltételekből) kiindulva matematikailag helyes következtetésekkel eljutunk a bizonyítandó állításhoz. A legtöbb matematikai tétel (geometriai, algebrai) bizonyítása direkt úton történik.

TÉTEL: Pitagorasz-tétel: derékszögű háromszögben a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

BIZONYÍTÁS: (12. tétel)

$$a^2 + b^2 + 4t = c^2 + 4t$$
$$a^2 + b^2 = c^2. \square$$



III. Indirekt bizonyítás

DEFINÍCIÓ: Az indirekt bizonyítás olyan eljárás, melynek során feltesszük, hogy a bizonyítandó állítás nem igaz, és ebből kiindulva helyes következtetésekkel lehetetlen következményekhez jutunk el. Így a kiinduló feltevés volt téves, vagyis a bizonyítandó állítás valójában igaz.

Ha egy állítás ellenkezőjéről (tagadásáról) helyes gondolatmenettel belátjuk, hogy hamis (ellentmondásra vezet), akkor a kijelentés ellentétének ellentéte, azaz maga az állítás igaz.

Az indirekt módszer két logikai törvényen alapul:

- Minden kijelentés igaz, vagy hamis.
- Egy igaz állítás tagadása hamis, és fordítva, hamis kijelentés tagadása igaz.

Indirekt bizonyítási módot akkor érdemes választani, ha az állítás tagadása könnyebben kezelhető, mint maga az állítás.

TÉTEL: Pitagorasz-tétel megfordítása: ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetének összege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

BIZONYÍTÁS: (12. tétel)

Tudjuk, hogy $a^2 + b^2 = c^2$.

Tegyük fel, hogy a háromszög nem derékszögű. Ekkor tudunk szerkeszteni olyan derékszögű háromszöget, aminek a befogói a és b, átfogója legyen c'. Mivel ez derékszögű háromszög, a Pitagorasz-tétel miatt: $a^2 + b^2 = (c')^2$. Az eredeti feltétellel összevetve $c^2 = (c')^2$, amiből pozitív mennyiségekről lévén szó, következik, hogy $c = c'$.

Ez ellentmond a kiinduló feltételnek, így a háromszög derékszögű.□

TÉTEL: $\sqrt{2}$ irracionális

BIZONYÍTÁS: (2. tétel)

Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ (ahol } p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1) \qquad /(\ )^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

A négyzetszámokban minden prímtényező páros sokszor fordul elő, ebből következik, hogy a bal oldalon páratlan sok db 2-es van, a jobb oldalon páros sok db 2-es van. A számelmélet alaptétele miatt ez nem lehet, mert egy szám csak egyféleképpen bontható fel prímszámok szorzatára. Mivel ez ellentmondás, rossz volt a feltevés, vagyis $\sqrt{2}$ irracionális.□

IV. Bizonyítás teljes indukcióval

DEFINÍCIÓ: A teljes indukció olyan állítások bizonyítására alkalmas, melyek n pozitív egész számtól függenek. A teljes indukciós eljárás során először bebizonyítjuk az állítást $n = 1$-re (vagy valamilyen konkrét értékre), majd feltételezzük, hogy az állítás igaz $n = k$-ra (indukciós feltevés), és ennek felhasználásával bebizonyítjuk, hogy az állítás igaz $n = (k + 1)$-re. Ezzel az állítást minden n pozitív egész számra belátjuk.

A teljes indukciót gyakran hasonlítják egy olyan végtelen sok dominóból álló sorhoz, amelyben azt tudjuk, hogy ha bármelyik dominó feldől, akkor feldönti a sorban utána következőt is. Ez azt jelenti, hogy ha meglökjük az első dominót, akkor az összes fel fog borulni.

A teljes indukciós bizonyítást egész számokkal kapcsolatos problémák, oszthatósági szabályok megoldására, tételek bizonyítására használhatjuk.

TÉTEL: Az első n pozitív egész szám összege: $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$.

BIZONYÍTÁS:

$n = 1$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \\ \dfrac{1\cdot 2}{2}=1 \end{array}\right\} =$$

$n = 2$

$$\left.\begin{array}{l} 1+2=3 \\ \dfrac{2\cdot 3}{2}=3 \end{array}\right\} =$$

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz, tehát $1+2+...+k=\dfrac{k\cdot(k+1)}{2}$.

Bizonyítani kell: $1+2+...+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$.

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\cdot\left(\frac{k}{2}+1\right)=(k+1)\cdot\frac{(k+2)}{2}=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}.$$

Vagyis az állítás teljesül. □

TÉTEL: Az első n pozitív páratlan szám összege: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

BIZONYÍTÁS:

$n = 1$

Ekkor a bal oldalon csak egy tagja van az összeadásnak, az 1, a jobb oldalon pedig $1^2 = 1$ áll, így igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz, tehát $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$.

Bizonyítani kell: $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (k + 1) = (k + 1)^2$.

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (k + 1) = k^2 + (k + 1) = (k + 1)^2$. Vagyis az állítás teljesül. □

TÉTEL: Az első n pozitív egész szám négyzetének összege: $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

BIZONYÍTÁS:

$n = 1$

$$\left.\begin{array}{l} 1^2=1 \\ \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1 \end{array}\right\} =$$

$n = 2$

$$\left.\begin{array}{l} 1^2+2^2=5 \\ \dfrac{2\cdot 3\cdot 5}{6}=5 \end{array}\right\} =$$

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz, tehát $1^2+2^2+3^2+...+k^2=\dfrac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$.

Be kellene látni, hogy $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}$.

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=(k+1)\cdot\frac{k\cdot(2k+1)+6\cdot(k+1)}{6}=(k+1)\cdot\frac{2k^2+k+6k+6}{6}=\frac{(k+1)\cdot(2k^2+7k+6)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)\cdot(2k+3)\cdot(k+2)}{6}.\ \square$$

Vagyis az állítás teljesül. □

V. Bizonyítás skatulya-elvvel

TÉTEL: Skatulya-elv: a skatulyaelv értelmében ha n skatulyába kell n-nél több elemet szétosztani, akkor a skatulyák valamelyikébe szükségképpen legalább 2 elem kerül. Ha n skatulyába $k \cdot n$-nél több elemet kell szétosztani, akkor a skatulyák valamelyikébe legalább $k + 1$ elem kerül (n, $k \in \mathbb{Z}^+$).

BIZONYÍTÁS: Indirekt módon: ha az elv nem igaz, akkor minden skatulyába legfeljebb 1 elem kerül. Ekkor legfeljebb annyi elem van, ahány skatulya. ez ellentmondás, mert az elemek száma a skatulyák számánál több. □

Az elv végtelen halmazokra is alkalmazható, csak ilyenkor elemszám helyett számosságot kell használni.
Skatulya elvvel általában oszthatósági problémákat, csoportosítással kapcsolatos feladatokat oldhatunk meg.

TÉTEL: Ha adott $n + 1$ darab pozitív egész szám, akkor ezek között biztosan van kettő olyan, amelyek különbsége osztható n-nel.

BIZONYÍTÁS: Készítsünk n db skatulyát, felcímkézve őket 0, 1, …, $(n - 1)$-ig. A számokat aszerint helyezzük el az n db skatulyában, hogy mennyi maradékot adnak n-nel osztva. Ekkor biztosan van olyan skatulya, amelybe legalább 2 szám kerül, hiszen $n + 1$ számot kell n skatulyába szétosztani. Ennek a két számnak a különbsége biztosan osztható lesz n-nel. □

Speciálisan: bizonyítsuk be, hogy öt pozitív egész szám között biztosan van kettő, amelyek különbsége osztható néggyel.

FELADAT: Bizonyítsuk be, hogy egy 37 fős társaságban biztosan van 4 olyan ember, akik ugyanabban a csillagjegyben születtek.

BIZONYÍTÁS: 36 főnél előfordulhat az, hogy minden csillagjegyhez csak 3 ember tartozik, de a 37-edik ember biztosan valamelyik csillagjegynél a negyedik lesz. □

VI. Alkalmazások

Direkt bizonyítás:
- $a \mid b$ és $a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$
- $9 \mid a \Leftrightarrow$ számjegyek összege osztható 9-cel

Indirekt bizonyítás:
- végtelen sok prímszám van

Skatulya-elv:
- 25 fős társaságban biztosan van 3 fő, akik azonos csillagjegyben születtek
- 5 pozitív egész szám között van 2, melyek különbsége osztható 4-gyel

Teljes indukció:
- $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Az ókori Egyiptomban, Mezopotámiában, Kínában, Indiában a matematika gyakorlati jellegű volt: lehetővé tette a pontos idő- és helymeghatározást, az adószedéssel és a közmunkákkal kapcsolatos számításokat. Nem jegyezték fel, hogyan jöttek rá a matematikai igazságokra, módszerekre, csak rögzítették a módszereket, eljárásokat.
- A Kr.e. 7.–6. században keletkezett a matematika, mint tudomány: ekkor már igény volt az okok kutatására.
- A legkorábbi görög matematika Kr.e. 450 körül született **Hippokratész** félholdacskákkal foglalkozó munkája. Ez a mű megmutatja, hogy a görögöknek fejlett volt a geometriája, egy állítást már bizonyított tényekkel kellett igazolni. A tételeket logikai úton, más tételekből vezették le. Ez a módszer alapigazságokra, axiómákra épült, ezeket a természetből absztrahálták.
- Kr.e. 300 körül **Euklidész** megalkotta a geometria axiómarendszerét, bevezette a deduktív (levezető) bizonyításmódot. Tőle származik a $\sqrt{2}$ irracionális tétel előbb ismertetett indirekt bizonyítása.
- A teljes indukció első írásos emléke 1575-ből származik: Ekkor bizonyította be a fenti módon **Maurolico** olasz matematikus az első *n* páratlan szám összegére vonatkozó tételt.
- A skatulya-elvet **Dirichlet** (1805–1859) francia matematikus bizonyította be a fenti módon.